## التمرين الرابع " 04 نقط "

في الفضاء المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، لتكن النقط : A( 1,-1,3 ) ، B( 0, 3,1 ) ، C( 6,-7,-1 ) ، D( 2,1,3 ) .

1). أثبت أن مرجح الجملة $\{(A,2),(B,-1),(C,1)\}$ هو النقطة E( 4,-6,2 ) .

2). عين (S) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{21}$.

3). بين أن النقط A , B , D تعين مستويا .

4). أثبت أن المستقيم ( EC ) عمودي على المستوي (ABD ) ،

- أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (ABD ) .

5). عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم ( EC ) .

- جد إحداثيات النقطة F نقطة تقاطع المستقيم (EC ) و المستوي (ABD ) .

6). برهن أن المستوي (ABD) و المجموعة (S) يتقاطعان وفق دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

# الحل

## التمرين الثالث : " 04 نقط "

في الفضاء المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، لتكن النقط : A( 1,-1,3 ) ، B( 0, 3,1 ) ، C( 6,-7,-1 ) ، D( 2,1,3 ) .

**1). أثبت أن مرجح الجملة $\{(A,2),(B,-1),(C,1)\}$ هو النقطة E( 4,-6,2 ) .**

بمأن $2-1+1\neq 0$ فإن الجملة $\{(A,2),(B,-1),(C,1)\}$ تقبل $E$ مرجح

تعين إحداثيات $E$

لدينا
$$\begin{cases} x_E = \dfrac{2x_A - x_B + x_C}{2-1+1} \\ y_E = \dfrac{2y_A - y_B + y_C}{2-1+1} \\ z_E = \dfrac{2z_A - z_B + z_C}{2-1+1} \end{cases}$$
ومنه
$$\begin{cases} x_E = \dfrac{2(1)-(0)+(6)}{2-1+1} = \dfrac{8}{2} \\ y_E = \dfrac{2(-1)-(3)+(-7)}{2-1+1} = \dfrac{-12}{2} \\ z_E = \dfrac{2(3)-(1)+(1)}{2-1+1} = \dfrac{6}{2} \end{cases}$$
إذن
$$\begin{cases} x_E = 4 \\ y_E = -6 \\ z_E = 3 \end{cases}$$

ومنه النقطة E( 4,-6,2 ) مرجح الجملة $\{(A,2),(B,-1),(C,1)\}$ .

**2). عين (S) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 2\sqrt{21}$ .**

لدينا
$$\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 2\sqrt{21}$$
$$\left\|2\left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA}\right) - \left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB}\right) + \left(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC}\right)\right\| = 2\sqrt{21}$$
$$\left\|2\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{ME} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC}\right\| = 2\sqrt{21}$$
$$\left\|2\overrightarrow{ME} + 2\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC}\right\| = 2\sqrt{21}$$
$$\left\|2\overrightarrow{ME}\right\| = 2\sqrt{21}$$
$$\left\|\overrightarrow{ME}\right\| = \sqrt{21}$$

ومنه مجموعة النقط M من الفضاء بحيث هي سطح كرة مركزها $E$ و نصف قطرها $r=\sqrt{21}$ .

**3). بين أن النقط A , B , D تعين مستويا**

D , B , A تعين مستويا يكافيء أن $\overrightarrow{AB}$ لايوازي $\overrightarrow{AD}$

لدينا $\overrightarrow{AB}(-1;4;-2)$ و $\overrightarrow{AD}(1;-2;0)$

وبمأن $\frac{z_{\overrightarrow{AD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} \neq \frac{y_{\overrightarrow{AD}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} \neq \frac{x_{\overrightarrow{AD}}}{x_{\overrightarrow{AB}}}$ إذن لا يوجد عدد حقيقي $k$ بحيث يكون $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AD}$ ومنه $\overrightarrow{AB}$ لا يوازى $\overrightarrow{AD}$ ومنه النقط D , B , A ليست على إستقامة فهي تشكل مستو .

**4). أثبت أن المستقيم ( EC ) عمودي على المستوي (ABD ) ، ثم اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABD )**

( EC ) عمودي على المستوي (ABD ) يكافيء أن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC} = 0$ و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{EC} = 0$

لدينا $\overrightarrow{EC}(2;-1;-3)$

ومنه

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC} = (-1;4;-2).(2;-1;-3)$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC} = -2-4+6$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EC} = 0$$

و

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{EC} = (1;-2;0).(2;-1;-3)$$
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{EC} = -2+2+0$$
$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{EC} = 0$$

ومنه( EC ) عمودي على المستوي (ABD ) ومنه نستنتج أن $\overrightarrow{EC}$ هو أحد الأشعة الناظمية للمستو $ABD$

**معادلة ديكارتية للمستوي (ABD )**

لتكن النقطة $M(x;y;z)$ من المستوى $(ABD)$ الذي شعاعه الناظمي هو $\overrightarrow{EC}$

ومنه معادلة ديكارتية للمستوي (ABD ) من الشكل $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{EC} = 0$

$$(x-1;y+1;z-3).(2;-1;-3) = 0$$

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{EC} = 0$ يكافيء

$$2x-2-y-1-3z+9 = 0$$
$$2x-y-3z+6 = 0$$

ومنه المعادلة الديكالرتية للمستو $(ABD)$ هي $2x-y-3z+6=0$

**5). عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم ( EC )**

لتكن النقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم $(EC)$ الذي شعاع توجيهه هو $\overrightarrow{EC}$

ومنه ومنه التمثيل الوسيطي المستقيم $(EC)$ من الشكل $t \in \mathrm{R}$ $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EC}t$

$t \in \mathrm{R}$ $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EC}t$ يكافيء

$$(EC):\begin{cases} x = 2t+4 \\ y = -t-6 \quad t \in \mathrm{R} \\ z = -3t+3 \end{cases}$$

**إجاد إحداثيات النقطة F نقطة تقاطع المستقيم (EC ) و المستوى (ABD ) .**

تقاطع المستقيم (EC) و المستوي (ABD) نحل الجملة $t \in R$

$$\begin{cases} 2x-y-3z+6=0 \\ x=2t+4 \\ y=-t-6 \\ z=-3t+3 \end{cases}$$

بالتعويض نجد

$$2(2t+4)-(-t-6)-3(-3t+3)+6=0$$
$$4t+8+t+6+9t-9+6=0$$
$$14t+11=0$$
$$t=-\frac{11}{14}$$

ومنه إحداثيات F هي

$$\begin{cases} x=2\frac{-11}{14}+4 \\ y=-\frac{-11}{14}-6 \\ z=-3\frac{-11}{14}+3 \end{cases}$$

ومنه

$$\begin{cases} x=\frac{17}{7} \\ y=\frac{73}{14} \\ z=\frac{75}{14} \end{cases}$$

ومنه $F(\frac{17}{7};\frac{73}{14};\frac{75}{14})$

**6). برهن أن المستوي (ABD) و المجموعة (S) يتقاطعان وفق دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .**

نحسب المسافة بين المستو(ABD) و $E$ مركز الكرة (S)

$$d(p;A)=\frac{|2x_E-y_E-3z_E+6|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-3)^2}}$$

$$d(p;A)=\frac{11}{\sqrt{14}}$$

نلاحظ أن $\sqrt{21} \succ \frac{11\sqrt{14}}{14}$ ومنه فإن $d(p;A)<R_s$ إذن المستو (ABD) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة مركزها مسقط $E$ على المستو (ABD) أى $F$ و نصف قطرها $R_c$ حيث $R_s^2=R_c^2+d(p;E)^2$

ومنه

$$R_{\varsigma}{}^{2} = R_{s}{}^{2} - d(p;E)^{2}$$

ومنه $R_{s}{}^{2} = R_{c}{}^{2} + d(p;E)^{2}$

$$R_{\varsigma}{}^{2} = \sqrt{21}^{2} - \left(\frac{11}{\sqrt{14}}\right)^{2} = 21 - \frac{121}{14}$$

$$R_{\varsigma}{}^{2} = \frac{294-121}{14} = \frac{173}{14}$$

# تم بحمد الله وفضله

الهم إجعله فى ميزان حسنات كل من ساهم فى هذا العمل و من نشره ونقله وأفاد به غيره أمين