المستوى : 3 رياضي + عتج + تق رياضي .

بطاقة رقم 01

الموسم الدراسي : 2015/2014

الأستاذ : شايبي أمين

ميدان التعلم : تحليل

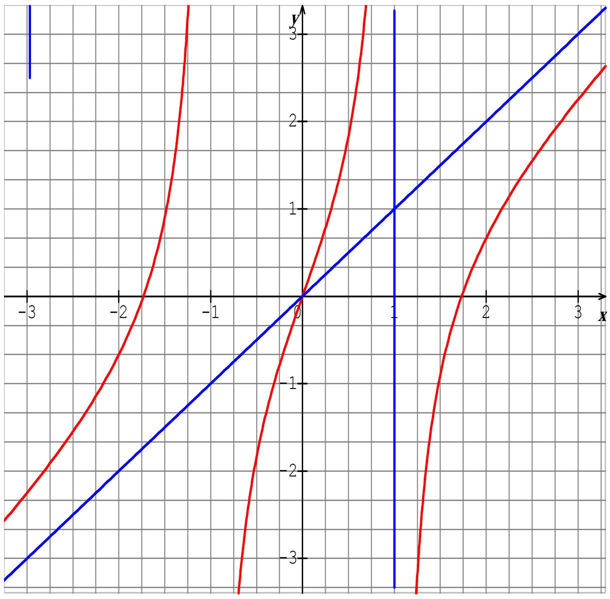
المحور: الدوال العددية

الدرس : النهايات والإستمرارية

المراجع الخاصة بهذا الدرس : الكتاب المدرسي السنة الثانية , الكتاب المدرسي السنة الثالثة الجزء الأول .

الكفاءات المستهدفة: -حساب نهاية منتهية أو غير منتهية لدالة عند الحدود(المنتهية أو غ المنتهية)لمجالات مجموعة التعريف.

- حساب نهاية باستعمال المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات أو المقارنة وتركيب دالتين.
- دراسة السلوك التقاربي لدالة.
- استعمال مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات وجود حلول للمعادلة $f(x) = k$, k عدد حقيقي معطى .

الأنشطة المقترحة	سير الحصة	توجيهات وملاحظات
نشاط 01:	المنحنى (C) المرسوم في الشكل المقابل باللون الأحمر هو لدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$. رسمت المستقيمات المقاربة لهذا المنحنى باللون الأزرق. بواسطة قراءة بيانية: 1. حدد معادلات المستقيمات المقاربة. 2. عين نهايات الدالة f عند كل من $-\infty$ ؛ $+\infty$ ؛ -1 و 1 . 	ننطلق من وضعيات ذات دلالة تتعلق بالدوال المدروسة في السنة الثانية. و نهتم فقط بدوال تكون مجموعة تعريفها معطاة أو سهلة التعيين -تدعيم مكتسبات التلاميذ حول مفهوم النهاية في وضعيات بسيطة)مثلا النهاية المنتهية عند عدد حقيقي a . وتوظيف ذلك في أمثلة بسيطة ثم توسع إلى وضعيات أخرى . ولتوضيح ذلك، نعتمد على تمثيلات بيانية باستعمال برمجيات مناسبة كالمجدولات كما يمكن توظيف الحاسبة البيانية: بإزاحة النافذة نحو اليسار عندما يؤول x إلى $-\infty$ بإزاحة النافذة نحو اليمين عندما يؤول x إلى $+\infty$ – تستغل هذه المناسبة للتذكير بالمستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل.

		تعطى مبرهنات الحصر – نهاية منتهية , غير منتهية وكذا المبرهنة التي تربط الترتيب بين دالتين والترتيب بين نهايتين . حساب نهاية دالة مركبةg0f يطبق في الحالة التي تكون فيها دالة مألوفة .

الحل:

1. للمنحني (C) ثلاث مستقيمات مقاربة أولها المستقيم الذي معادلته $x=-1$، الثاني المستقيم الذي معادلته $x=1$، و الثالث مائل معادلته $y=x$ عند $-\infty$ و $+\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \; ; \; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

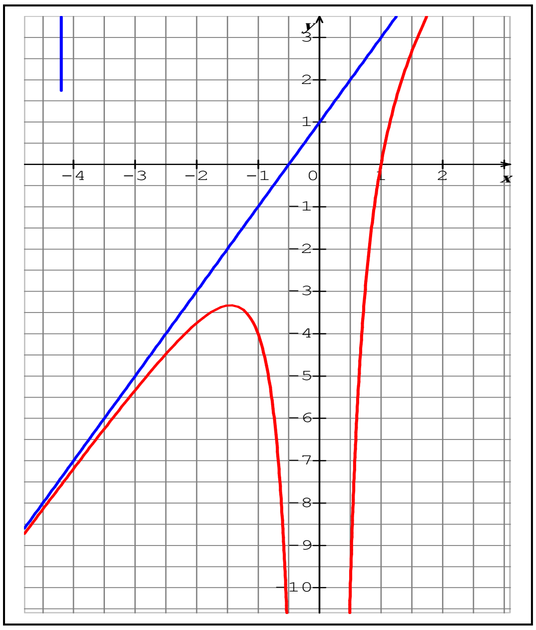
$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)=+\infty \; ; \; \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\ <}} f(x)=+\infty \; ; \; \lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)=-\infty$

نشاط 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=2x+1-\frac{3}{x^2}$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

1. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ و عند $-\infty$.
2. أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل (Δ).



الحل:

1. لدينا: $f(x)-(2x+1)=-\frac{3}{x^2}$

و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{3}{x^2}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x^2}\right)=0$

فإن (Δ) مستقيم مقارب لـــ (C) عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

2. لدينا: $f(x)-(2x+1)=-\frac{3}{x^2}$ و بما أن $-\frac{3}{x^2}<0$

فإن المنحني (C) يقع تحت المستقيم المقارب (Δ).

النهـــــايـــــات

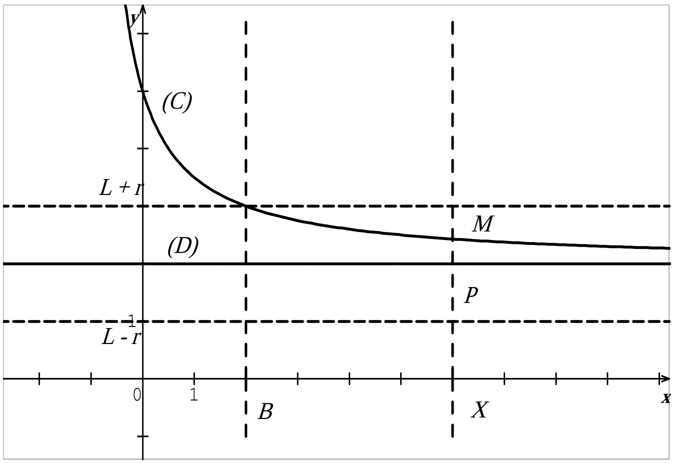
1) نهـاية منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

تعريـف: f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0;+\infty[$ و l عدد حقيقي.

نقول أن نهاية f عند $+\infty$ هي l إذا كان كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

نكتب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ ونقرأ: $f(x)$ يؤول إلى l عندما x يؤول إلى $+\infty$.

ملاحظات:



1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ تكافئ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-l)=0$

بيانيا هذا يعني أن عندما x ينتهي إلى $+\infty$ ، البعد MP ينتهي إلى 0.

المستقيم ذو المعادلة $y=l$ مستقيم مقارب أفقي للمنحنى (C) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

2) نحصل على تعريف و نتيجة مماثلة عند $-\infty$.

تمرين تطبيقي:

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$

أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

الحـل:

ليكن $I=]a;b[$ حيث $a<0<b$ I (مجال مفتوح يشمل العدد 0)

من أجل x من المجال $]2;+\infty[$ ، يكون لدينا: $x-2>0$

$f(x)\in I$ يعني $\dfrac{5}{x-2}>a$ و $\dfrac{5}{x-2}<b$

أي $5>ax-2a$ و $5<bx-2b$

ومنه $ax<2a+5$ و $bx>2b+5$

ومنه $x>\dfrac{2a+5}{a}$ و $x>\dfrac{2b+5}{b}$

إذن $x>2+\dfrac{5}{a}$ و $x>2+\dfrac{5}{b}$

وبالتالي $x>2+\dfrac{5}{b}$

نستنتج أنه من أجل x كبير بالقدر الكافي $\left(x>2+\dfrac{5}{b}\right)$ ، المجال I يشمل كل قيم $f(x)$.

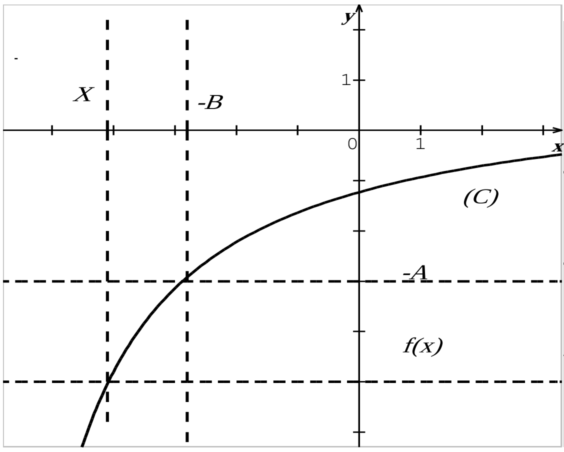
إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

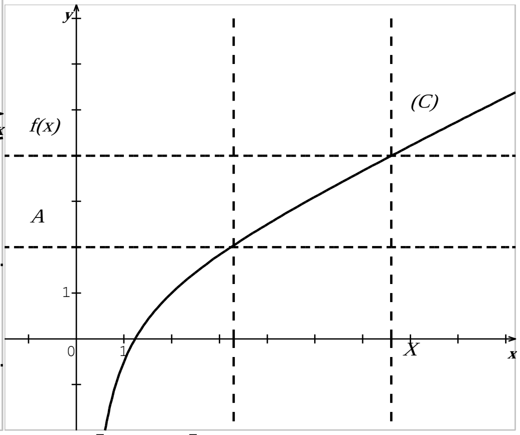
2) نهاية غير منتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

تعريف1: f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0;+\infty[$.

نقول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ إذا كان كل مجال من الشكل $[a;+\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

نكتب: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ونقرأ: $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما x يؤول إلى $+\infty$.





تعريف2: f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0;+\infty[$.

نقول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $-\infty$ إذا كان كل مجال من الشكل $]-\infty;b]$ $(b \in \mathbb{R})$ يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي.

نكتب: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ونقرأ: $f(x)$ يؤول إلى $-\infty$ عندما x يؤول إلى $+\infty$.

ملاحظة: نحصل على تعريفين مماثلين عند $-\infty$.

تمرين تطبيقي:

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]3;+\infty[$ بـ : $f(x) = \sqrt{2x-6}$

أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

الحل:

ليكن a عددا حقيقيا موجبا.

من أجل x من المجال $]3;+\infty[$ ، يكون لدينا: $2x-6 \geq 0$

$f(x) \in [a;+\infty[$ يعني $\sqrt{2x-6} \geq a$

أي $2x-6 \geq a^2$

ومنه $2x \geq 6+a^2$

إذن $x \geq 3+\dfrac{a^2}{2}$

نستنتج أنه من أجل x كبير بالقدر الكافي $\left(x \geq 3+\dfrac{a^2}{2}\right)$ ، المجال $[a;+\infty[$ يشمل كل قيم $f(x)$.

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3) نهاية منتهية عند عدد حقيقي:

تعريف: f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]x_0;b[\cup]a;x_0[$ و l عدد حقيقي .

نقول أن نهاية f عند x_0 هي l إذا كان كل مجال مفتوح شامل للعدد l يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0.

نكتب: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ ونقرأ: $f(x)$ يؤول إلى l عندما x يؤول إلى x_0.

تمرين تطبيقي:

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[2;+\infty[$ بـ: $f(x) = (x-2)^2 + 3$

نريد دراسة سلوك $f(x)$ عندما x يؤول إلى 3.

1) ضع تخمينا.

2) في أي مجال يجب إختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى المجال $[3,99;4,01]$؟

3) r عدد حقيقي حيث $0 < r < 1$.

أ) في أي مجال يجب إختيار x بحيث $f(x) \in [4-r;4+r]$ ؟

ب) ماذا نستنتج علما أنه يمكن إختيار r صغيرا بالقدر الذي نريد ؟

الحـل:

1) يبدو أنه كلما اقترب x من 3 ، اقترب $f(x)$ من $(3-2)^2 + 3$ أي من 4 .

2) $f(x) \in [3,99;4,01]$ يعني $3,99 \le f(x) \le 4,01$

أي $3,99 \le (x-2)^2 + 3 \le 4,01$

ومنه $0,99 \le (x-2)^2 \le 1,01$

ومنه $0,99 \le x-2 \le 1,004$

وبالتالي $2,99 \le x \le 3,004$

إذن $x \in [2,99;3,004]$

3) أ) $f(x) \in [4-r;4+r]$ يعني $4-r \le f(x) \le 4+r$

أي $4-r \le (x-2)^2 + 3 \le 4+r$

ومنه $1-r \le (x-2)^2 \le 1+r$

ومنه $\sqrt{1-r} \le x-2 \le \sqrt{1+r}$

وبالتالي $2+\sqrt{1-r} \le x \le 2+\sqrt{1+r}$

إذن $x \in \left[2+\sqrt{1-r};2+\sqrt{1+r}\right]$

ب) عندما نختار r صغيرا بالقدر الذي نريد، يكون x قريبا من 3 بالقدر الكافي وبالتالي يكون $f(x)$ قريبا من 4 بالقدر الذي نريد.

إذن $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$

4) نـهـاية غير منتهية عند عدد حقيقي:

تعريـف: f دالة معرفة على مجموعة من الشكل $]a;x_0[\cup]x_0;b[$.

نقول أن نهاية f عند x_0 هي $+\infty$ إذا كان كل مجال من الشكل $[a;+\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$) يشمل كل القيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0.

نكتب: $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ونقرأ: $f(x)$ يؤول إلى $+\infty$ عندما x يؤول إلى x_0.

مثـال:

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$

عندما يقترب x من 0 بالقدر الكافي ، تأخذ $f(x)$ قيما كبيرة بالقدر الذي نريد ، عندئذ يكون لدينا:

$$\lim_{x \to 0} f(x)=+\infty$$

5) تتمات على النهايات:

1 - بعض نهايات الدوال المرجعية:

$$\lim_{x \to +\infty} x=+\infty \quad ، \quad \lim_{x \to -\infty} x=-\infty \quad ، \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}=+\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2=+\infty \quad ، \quad \lim_{x \to -\infty} x^2=+\infty \quad ، \quad \lim_{x \to +\infty} x^3=+\infty \quad ، \quad \lim_{x \to -\infty} x^3=-\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}=0 \quad ، \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}=0 \quad ، \quad \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \frac{1}{x}=-\infty \quad ، \quad \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{1}{x}=+\infty$$

2- العمليات على النهايات:

f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$.

l و l' عددان حقيقيان.

*** نهاية مجموع دالتين:**

$\lim_{x \to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to a} \left(f(x)+g(x)\right)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

*** نهاية جداء دالتين:** l و l' عددان حقيقيان.

$\lim_{x \to a} f(x)$	l	l $l>0$	l $l>0$	l $l<0$	l $l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to a} \left(f(x)\times g(x)\right)$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

*** نهاية حاصل قسمة دالتين:** l و l' عددان حقيقيان حيث $l'\neq 0$.

$\lim_{x \to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	l' $l'>0$	l' $l'<0$	l' $l'>0$	l' $l'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$	$\dfrac{l}{l'}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

تمرين تطبيقي :

أحسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x \to -\infty}(-2x^2+4x-5)$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty}(-2x^2+4x-5)$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty}(4x^3-2x^2+3x-1)$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty}(4x^3-2x^2+3x-1)$

5) $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{x^3-x+2}{3-x}\right)$

6) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{x^3-x+2}{3-x}\right)$

الحل:

1) $$\lim_{x \to -\infty}(-2x^2+4x-5)=-\infty$$

2) $$\lim_{x \to +\infty}(-2x^2+4x-5)=\lim_{x \to +\infty} x\left(-2x+4-\frac{5}{x}\right)$$

إذن $$\lim_{x \to +\infty}(-2x^2+4x-5)=-\infty$$

3) $$\lim_{x \to -\infty}(4x^3-2x^2+3x-1)=-\infty$$

4) $$\lim_{x \to +\infty}(4x^3-2x^2+3x-1)=\lim_{x \to +\infty} x^2\left(4x-2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

إذن $$\lim_{x \to +\infty}(4x^3-2x^2+3x-1)=+\infty$$

5) $$\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x^3-x+2}{3-x}\right)=\lim_{x \to -\infty}\frac{x\left(x^2-1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{3}{x}-1\right)}$$

$$=\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x^2-1+\frac{2}{x}}{\frac{3}{x}-1}\right)$$

إذن $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3 - x + 2}{3 - x} \right) = -\infty$

(6 $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 - x + 2}{3 - x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(x^2 - 1 + \frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{3}{x} - 1\right)}$

$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 1 + \frac{2}{x}}{\frac{3}{x} - 1} \right)$

إذن $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 - x + 2}{3 - x} \right) = -\infty$

3- النهايات بالمقارنة:

مبرهنة1: f ، g و h ثلاث دوال و l عدد حقيقي.

إذا كانت $\lim_{x \to +\infty} g(x) = l$ و $\lim_{x \to +\infty} h(x) = l$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي ، $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

ملاحظة: تمدد هذه المبرهنة إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ وعند عدد حقيقي.

تمرين تطبيقي:

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1 - 2\sin x}{x^2}$

(1 بين أنه من أجل كل x من $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$:

$$-\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{3}{x^2}$$

(2 استنتج نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

الحل:

(1 من أجل كل x من $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$: $-1 \leq \sin x \leq 1$

ومنه $-2 \leq -2\sin x \leq 2$

ومنه $-1 \leq 1 - 2\sin x \leq 3$

إذن $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{1 - 2\sin x}{x^2} \leq \frac{3}{x^2}$

وبالتالي $-\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{3}{x^2}$

(2 من أجل كل x من $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ ، لدينا: $-\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{3}{x^2}$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3}{x^2}\right)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{x^2}\right)=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

مبرهنة2: f و g دالتان

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي، $f(x)\geq g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ملاحظة: تمدد هذه المبرهنة إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ وعند عدد حقيقي.

تمرين تطبيقي:

لتكن f الدالة المعرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x>3$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x+3}}$

1) بين أنه إذا كان $x>3$ فإن $\dfrac{1}{\sqrt{2x}}>\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$:

2) استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

الحل:

1) لدينا $x>3$ ومنه $x+x>x+3$ أي $2x>x+3$.

وبالتالي $\sqrt{2x}>\sqrt{x+3}$

إذن: $\dfrac{1}{\sqrt{2x}}>\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

2) من أجل $x>3$ لدينا $\dfrac{1}{\sqrt{2x}}>\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$.

ومنه: $\dfrac{2x}{\sqrt{2x}}>\dfrac{2x}{\sqrt{x+3}}$

إذن: $f(x)>\sqrt{2x}$

وبما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

مبرهنة3: f و g دالتان

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ وإذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي، $f(x)\leq g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

ملاحظة: تمدد هذه المبرهنة إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ وعند عدد حقيقي.

تمرين تطبيقي:

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $3\cos x-2x\leq 3-2x$

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(3\cos x-2x)$.

الحل:

1) لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $\cos x\leq 1$

ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $3\cos x\leq 3$

وبالتالي من أجل كل عدد حقيقي x، $3\cos x-2x\leq 3-2x$

2) لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $3\cos x - 2x \le 3 - 2x$

ومنه من أجل كل x كبير بالقدر الكافي : $3\cos x - 2x \le 3 - 2x$

وبماأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-2x) = -\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}(3\cos x - 2x) = -\infty$

4- نهاية دالة مركبة:

مبرهنة: a ، b و c تمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u ، v و f دوال حيث $f = vou$.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ و $\lim\limits_{x\to b} v(x) = c$ فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$

تمرين تطبيقي1:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = 3\left(1 - \frac{4}{x}\right)^2 + 2$

أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

الحـل:

الدالة f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب أي $f = vou$ حيث : $u(x) = 1 - \frac{4}{x}$ و $v(x) = 3x^2 + 2$

بماأن $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 1$ و $\lim\limits_{x\to 1} v(x) = 5$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 5$

بماأن $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 1$ و $\lim\limits_{x\to 1} v(x) = 5$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$

تمرين تطبيقي2:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \cos\left(\frac{2}{x} - \frac{\pi}{2}\right)$

أدرس نهاية الدالة f عند $\frac{2}{\pi}$.

الحـل:

الدالة f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب أي $f = vou$ حيث : $u(x) = \frac{2}{x} - \frac{\pi}{2}$ و $v(x) = \cos x$

بماأن $\lim\limits_{x\to\frac{2}{\pi}} u(x) = \frac{\pi}{2}$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} v(x) = 0$ فإن $\lim\limits_{x\to\frac{2}{\pi}} f(x) = 0$

6) المستقيمات المقاربة:

1 / المستقيمات المقاربة الموازية لأحد محاور الإحداثيات :

a و b عددان حقيقيان. f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(o;\vec{i},\vec{j})$.

النهـايـة	معادلة المستقيم المقارب للمنحني (C_f) هي
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$x = a$

$y=b$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ أو $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$

2. المستقيم المقارب المائل:

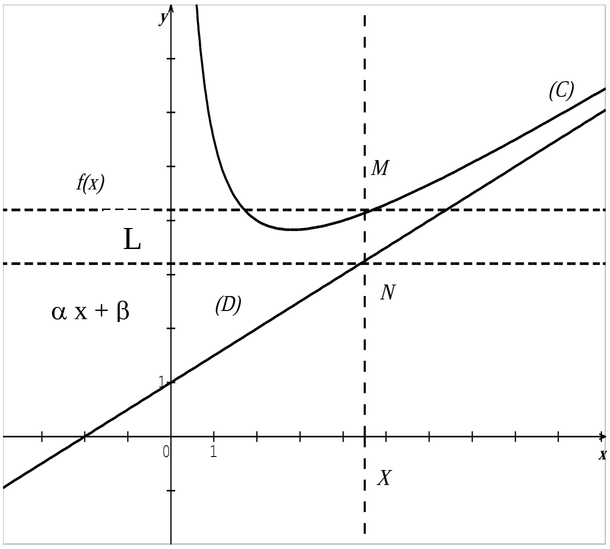
تعريف: لتكن f دالة معرفة على مجال من الشكل $]a;+\infty[$.

إذا وجد عددين حقيقيين a و b ودالة h حيث على هذا المجال يمكن كتابة :

$$f(x)=ax+b+h(x). \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} h(x)=0$$

فإنا نقول أن المستقيم (D) ذو المعادلة : $y=ax+b$

مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) الممثل للدالة f عند $+\infty$.



ملاحظات:

1. بيانيا هذا يعني أن عندما x ينتهي إلى $+\infty$ ، البعد MN ينتهي إلى 0 و $MN=|f(x)-(ax+B)|=|h(x)|$
2. لمعرفة الوضعية النسبية لــ(C) بالنسبة لــ (D) يجب معرفة إشارة الفرق :

مثـال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=3x+1-\dfrac{5}{1-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(o;\vec{i},\vec{j})$.

لدينا $\lim_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{5}{1-x}\right)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{5}{1-x}\right)=0$

إذن المستقيم الذي معادلته $y=3x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

7) الوضع النسبي لمنحن ومستقيم مقارب:

ليكن (C_f) المنحنى البياني الممثل لدالة f في معلم متعامد $(o;\vec{i},\vec{j})$.

(D) مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) معادلته من الشكل $y=ax+b$.

لدراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D)، نقوم بدراسة إشارة $[f(x)-(ax+b)]$.

إذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ فإن (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (D).

إذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ فإن (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب (D).

تمرين تطبيقي:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=4x+1+\dfrac{2x}{x^2+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=4x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f).

2) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).

الحل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $f(x)-(4x+1)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(4x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x+\frac{1}{x}}\right)$$

إذن $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(4x+1)\right]=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(4x+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x+\frac{1}{x}}\right)$$

إذن $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(4x+1)\right]=0$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=4x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f).

2) من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $f(x)-(4x+1)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

إذا كان $x\in\left]-\infty;0\right[$ فإن $\dfrac{2x}{x^2+1}<0$ أي $f(x)-(4x+1)<0$

إذن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (D) على المجال $\left]-\infty;0\right[$.

إذا كان $x\in\left]0;+\infty\right[$ فإن $\dfrac{2x}{x^2+1}>0$ أي $f(x)-(4x+1)>0$

إذن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب (D) على المجال $\left]0;+\infty\right[$.

تمـــارين محلولــة

تمرين 01:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{4x+3}{x-2}$

1) أوجد عددا حقيقيا a حيث إذا كان $x>a$ فإن $f(x)\in]3{,}9;4{,}1[$.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=4$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .

3) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

الحـل:

1) $f(x)\in]3{,}9;4{,}1[$ يعني $3{,}9<f(x)<4{,}1$

أي $3{,}9<\dfrac{4x+3}{x-2}<4{,}1$

ومنه $3{,}9(x-2)<4x+3<4{,}1(x-2)$ لأن $x-2>0$

أي $3{,}9x-7{,}8<4x+3<4{,}1x-8{,}2$

ومنه $(4x+3<4{,}1x-8{,}2)$ و $(3{,}9x-7{,}8<4x+3)$

ومنه $(-0{,}1x<-11{,}2)$ و $(-0{,}1x<10{,}8)$

عندئذ $(x>112)$ و $(x>-108)$

و بالتالي $x>112$

إذن $a=112$

(2

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)=\lim_{|x|\to+\infty}\left(\frac{4x+3}{x-2}\right)$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x\left(4+\dfrac{3}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{|x| \to +\infty} \left(\frac{4 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \right)$$

وبالتالي $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 4$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 4$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .

(3

$$f(x) - 4 = \frac{4x+3}{x-2} - 4$$

$$= \frac{4x+3-4x+8}{x-2}$$

وبالتالي $f(x) - 4 = \frac{11}{x-2}$

من أجل كل x من المجال $]2;+\infty[$ ، $\frac{11}{x-2} > 0$ أي $f(x) - 4 > 0$

إذن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

تمرين 02:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;3[$ بـ: $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

1) أوجد عددا حقيقيا a حيث إذا كان $x < a$ فإن $f(x)$ ينتمي إلى $]1,9;2,1[$.

2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .

3) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

الحل:

(1 $f(x) \in]1,9;2,1[$ يعني $1,9 < f(x) < 2,1$

أي $1,9 < \frac{2x+1}{x-3} < 2,1$

ومنه $2,1(x-3) < 2x+1 < 1,9(x-3)$ لأن $x-3<0$

أي $2,1x - 6,3 < 2x+1 < 1,9x - 5,7$

ومنه $(2x+1 < 1,9x-5,7)$ و $(2,1x-6,3 < 2x+1)$

ومنه $(0,1x < -6,7)$ و $(0,1x < 7,3)$

عندئذ $(x < -67)$ و $(x < 73)$

وبالتالي $x < -67$

إذن $a = -67$

(2

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \left(\frac{2x+1}{x-3} \right)$$

$$= \lim_{|x| \to +\infty} \frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}$$

$$= \lim_{|x| \to +\infty} \left(\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)$$

وبالتالي $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 2$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f .

(3
$$f(x) - 2 = \frac{2x+1}{x-3} - 2$$
$$= \frac{2x+1-2x+6}{x-3}$$

وبالتالي $f(x) - 2 = \frac{7}{x-3}$

من أجل كل x من المجال $]-\infty;3[$ ، $\frac{7}{x-3} < 0$ أي $f(x) - 2 < 0$

إذن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) .

تمرين 03:

أثبت باستعمال التعريف أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x-3} = 0$

الحل:

نضع $f(x) = \frac{2}{x-3}$

ليكن $I =]a;b[$ حيث $a < 0 < b$ I (مجال مفتوح يشمل العدد 0)

من أجل x من المجال $]3;+\infty[$ ، يكون لدينا: $x - 3 > 0$

$f(x) \in I$ يعني $f(x) > a$ و $f(x) < b$

أي $\frac{2}{x-3} > a$ و $\frac{2}{x-3} < b$

ومنه $2 > ax - 3a$ و $2 < bx - 3b$

ومنه $ax < 3a + 2$ و $bx > 3b + 2$

ومنه $x > \frac{3a+2}{a}$ و $x > \frac{3b+2}{b}$

إذن $x > 3 + \frac{2}{a}$ و $x > 3 + \frac{2}{b}$

وبالتالي $x > 3 + \frac{2}{b}$

نستنتج أنه من أجل x كبير بالقدر الكافي $\left(x > 3 + \frac{2}{b}\right)$، المجال I يشمل كل قيم $f(x)$.

ومنه $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ أي $\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x-3} = 0$

تمرين 04:

a و b عددان حقيقيان.

1) برهن أنه إذا كان $a < 3 < b$ فإن $\frac{a+2}{3-a} > \frac{b+2}{3-b}$.

2) أثبت باستعمال التعريف أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-2}{x+1} = 3$

الحل:

1) لدينا $a < 3 < b$ ومنه $a < 3$ و $b > 3$ أي $a - 3 < 0$ و $b - 3 > 0$

وبالتالي $(a-3)(b-3) < 0$

$$\frac{a+2}{3-a} - \frac{b+2}{3-b} = \frac{(a+2)(3-b)-(b+2)(3-a)}{(3-a)(3-b)}$$

$$= \frac{3a - ab + 6 - 2b - (3b - ab + 6 - 2a)}{(3-a)(3-b)}$$

$$= \frac{3a - ab + 6 - 2b - 3b + ab - 6 + 2a}{(3-a)(3-b)}$$

$$= \frac{5a - 5b}{(3-a)(3-b)}$$

إذن $\frac{a+2}{3-a} - \frac{b+2}{3-b} = \frac{5(a-b)}{(a-3)(b-3)}$

بما أن $a - b < 0$ و $(a-3)(b-3) < 0$ فإن $\frac{a+2}{3-a} - \frac{b+2}{3-b} > 0$

إذن $\frac{a+2}{3-a} > \frac{b+2}{3-b}$

2) إثبات باستعمال التعريف أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-2}{x+1} = 3$

نضع $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$

ليكن $I =]a;b[$ حيث $a < 3 < b$ I (مجال مفتوح يشمل العدد 3)

من أجل x من المجال $]-1;+\infty[$، يكون لدينا: $x + 1 > 0$

$f(x) \in I$ يعني $f(x) > a$ و $f(x) < b$

أي $\frac{3x-2}{x+1} > a$ و $\frac{3x-2}{x+1} < b$

ومنه $3x-2>ax+a$ و $3x-2<bx+b$

ومنه $(3-a)x>a+2$ و $(3-b)x<b+2$

ومنه $x>\frac{a+2}{3-a}$ و $x>\frac{b+2}{3-b}$

إذن $x>\frac{a+2}{3-a}$ لأن $\frac{a+2}{3-a}>\frac{b+2}{3-b}$

نستنتج أنه من أجل x كبير بالقدر الكافي $\left(x>\frac{a+2}{3-a}\right)$، المجال I يشمل كل قيم $f(x)$.

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$ أي $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{x+1}=3$

تمرين 05:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=3x+1$

أثبت باستعمال التعريف أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

الـحل:

ليكن a عددا حقيقيا موجبا.

$f(x)\in[a;+\infty[$ يعني $3x+1\geq a$

أي $3x\geq a-1$

إذن $x\geq\frac{a-1}{3}$

نستنتج أنه من أجل x كبير بالقدر الكافي $\left(x\geq\frac{a-1}{3}\right)$، المجال $[a;+\infty[$ يشمل كل قيم $f(x)$.

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تمرين 06:

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[-3;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x+3}$

أثبت باستعمال التعريف أن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

الـحل:

ليكن a عددا حقيقيا موجبا.

من أجل x من المجال $[-3;+\infty[$، يكون لدينا: $x+3\geq 0$

$f(x)\in[a;+\infty[$ يعني $\sqrt{x+3}\geq a$

أي $x+3\geq a^2$

إذن $x\geq a^2-3$

نستنتج أنه من أجل x كبير بالقدر الكافي $\left(x\geq a^2-3\right)$، المجال $[a;+\infty[$ يشمل كل قيم $f(x)$.

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

تمرين 07:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=3x+1-\frac{3}{x-2}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=3x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f).

2) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).

الحل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ ، لدينا:

$$f(x)-(3x+1)=-\frac{3}{x-2}$$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(3x+1)]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(3x+1)]=0$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=3x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f).

2) من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ ، لدينا: $f(x)-(3x+1)=-\frac{3}{x-2}$

إذا كان $x\in]-\infty;2[$ فإن $-\frac{3}{x-2}>0$ أي $f(x)-(3x+1)>0$

إذن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب (D) على المجال $]-\infty;2[$.

إذا كان $x\in]2;+\infty[$ فإن $-\frac{3}{x-2}<0$ أي $f(x)-(3x+1)<0$

إذن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (D) على المجال $]2;+\infty[$.

تمرين 08:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x-\frac{1}{2}+\frac{3x}{x^2+4}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f).

2) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).

الحل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{3x}{x^2+4}$ أي $f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{x+\frac{4}{x}}$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]=0$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f).

2) من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{3x}{x^2+4}$

إذا كان $x \in]-\infty;0[$ فإن $\frac{3x}{x^2+4} < 0$ أي $f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right) < 0$

إذن المنحني (C_f) يقع تحت المستقيم المقارب (D) على المجال $]-\infty;0[$.

إذا كان $x \in]0;+\infty[$ فإن $\frac{3x}{x^2+4} > 0$ أي $f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right) > 0$

إذن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب (D) على المجال $]0;+\infty[$.

تمرين 09:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{-x^2+3x+2}{x-2}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من المجال $]2;+\infty[$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$

ب) استنتج أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

3) أحسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

الحل:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2+3x+2}{x-2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+3+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

2)أ) من أجل كل x من المجال $]2;+\infty[$ ، لدينا:

$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$

$=\frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}$

إذن $(1)..........f(x)=\frac{ax^2+(b-2a)x+(c-2b)}{x-2}$

ولدينا من جهة أخرى: $(2)..........f(x)=\frac{-x^2+3x+2}{x-2}$

بالمطابقة بين (1) و (2) نجد:

$\begin{cases} a=-1 \\ b-2a=3 \\ c-2b=2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a=-1 \\ b=2a+3 \\ c=2b+2 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=4 \end{cases}$

عندئذ: $f(x)=-x+1+\dfrac{4}{x-2}$

ب) من أجل كل x من المجال $]2;+\infty[$ ، لدينا: $f(x)-(-x+1)=\dfrac{4}{x-2}$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+1)]=0$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

(3 $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}\left(\dfrac{-x^2+3x+2}{x-2}\right)$ إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty$

إذن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=2$.

تمرين 10:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+5}{(x-2)^2}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

(1 أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

(2 بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

(3 أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).

(4 عين أصغر عدد طبيعي n حيث من أجل كل x يحقق $(x\geq n)$ ، يكون لدينا:

$$f(x)-(x+1)\leq\frac{1}{100}$$

الحل:

(1
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+5}{(x-2)^2}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+5}{x^2-4x+4}\right)$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-3+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)$$

إذن $\lim f(x)=-\infty$

$x \to -\infty$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 2} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 2} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3-3x^2+5}{(x-2)^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-3+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)$$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) من أجل كل x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ ، لدينا:

$$f(x)-(x+1) = \frac{x^3-3x^2+5}{(x-2)^2}-(x+1)$$

$$= \frac{x^3-3x^2+5-(x-2)^2(x+1)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^3-3x^2+5-(x^2-4x+4)(x+1)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{x^3-3x^2+5-(x^3-3x^2+4)}{(x-2)^2}$$

إذن $f(x)-(x+1) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)] = 0$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

3) من أجل كل x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ ، لدينا: $f(x)-(x+1) > 0$

إذن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم المقارب (D) على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.

4) تعيين أصغر عدد طبيعي n حيث من أجل كل x يحقق $(x \geq n)$ ، يكون لدينا: $f(x)-(x+1) \leq \dfrac{1}{100}$

$f(x)-(x+1) \leq \dfrac{1}{100}$ يعني $\dfrac{1}{(x-2)^2} \leq \dfrac{1}{100}$

أي $(x-2)^2 \geq 100$ لأن $x \neq 2$

ومنه $(x-2)^2 - 10^2 \geq 0$

ومنه $(x+8)(x-12) \geq 0$

x	$-\infty$ -8 12 $+\infty$

$x+8$	$-$	0	$+$		$+$		
$x-12$	$-$		$-$	0	$+$		
$(x+8)(x-12)$	$+$	0	$-$	0	$+$		

نستنتج من الجدول أن $(x+8)(x-12)\geq 0$ إذا كان $x\leq -8$ أو $x\geq 12$.

إذن أصغر عدد طبيعي n حيث من أجل كل x يحقق $(x\geq n)$، يكون لدينا: $f(x)-(x+1)\leq \frac{1}{100}$ هو 12.

تمرين 11:

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $\quad f(x)=-x+4$

نريد دراسة سلوك $f(x)$ عندما x يؤول إلى 1.

1) ضع تخمينا.

2) في أي مجال يجب إختيار x بحيث ينتمي $f(x)$ إلى المجال $[2{,}99;3{,}01]$؟

3) r عدد حقيقي حيث $0<r<1$.

أ) في أي مجال يجب إختيار x بحيث $f(x)\in[3-r;3+r]$ ؟

ب) ماذا نستنتج علما أنه يمكن إختيار r صغيرا بالقدر الذي نريد ؟

الحـل:

1) يبدو أنه كلما اقترب x من 1، اقترب $f(x)$ من 3.

2) $f(x)\in]2{,}99;3{,}01[$ يعني $2{,}99<f(x)<3{,}01$

أي $2{,}99<-x+4<3{,}01$

ومنه $-1{,}01<-x<-0{,}99$

وبالتالي $0{,}99<x<1{,}01$

إذن $x\in]0{,}99;1{,}01[$

3) أ) $f(x)\in]3-r;3+r[$ يعني $3-r<f(x)<3+r$

أي $3-r<-x+4<3+r$

ومنه $-1-r<-x<r-1$

وبالتالي $1-r<x<1+r$ أي $x\in]1-r;1+r[$

ب) عندما نختار r صغيرا بالقدر الذي نريد، يكون x قريبا من 1 بالقدر الكافي

وبالتالي يكون $f(x)$ قريبا من 3 بالقدر الذي نريد.

إذن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$

تمرين 12:

أحسب النهايات التالية:

(1 $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^2+x-2)$

(2 $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^2+x-2)$

(3 $\lim(-2x^3-x^2+4x+3)$

(4 $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^3-x^2+4x+3)$

(5 $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^4+2x^3-3x+1)$

(6 $\lim(-x^4+2x^3-3x+1)$

$x \to +\infty$ $\qquad$ $x \to -\infty$

الحل:

(1 $\lim\limits_{x \to -\infty}(3x^2 + x - 2) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(3x + 1 - \dfrac{2}{x}\right)$

إذن $\lim\limits_{x \to -\infty}(3x^2 + x - 2) = +\infty$

(2 $\lim\limits_{x \to +\infty}(3x^2 + x - 2) = +\infty$

(3 $\lim\limits_{x \to -\infty}(-2x^3 - x^2 + 4x + 3) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2\left(-2x - 1 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right)$

إذن $\lim\limits_{x \to -\infty}(-2x^3 - x^2 + 4x + 3) = +\infty$

(4 $\lim\limits_{x \to +\infty}(-2x^3 - x^2 + 4x + 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(-2x^2 - x + 4 + \dfrac{3}{x}\right)$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty}(-2x^3 - x^2 + 4x + 3) = -\infty$

(5 $\lim\limits_{x \to -\infty}(-x^4 + 2x^3 - 3x + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(-x^3 + 2x^2 - 3 + \dfrac{1}{x}\right)$

إذن $\lim\limits_{x \to -\infty}(-x^4 + 2x^3 - 3x + 1) = -\infty$

(6 $\lim\limits_{x \to +\infty}(-x^4 + 2x^3 - 3x + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3\left(-x + 2 - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty}(-x^4 + 2x^3 - 3x + 1) = -\infty$

تمرين 13:

أحسب النهايات التالية:

(1 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x - 3}{x + 4}$ $\qquad$ **(3** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + 2}{1 - 2x}$

(2 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 3}{x + 4}$ $\qquad$ **(4** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 2}{1 - 2x}$

الحل:

(1

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x-3}{x+4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{4}{x}}\right)$$

إذن $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x-3}{x+4} = 2$

(2

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x-3}{x+4}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{4}{x}}\right)$$

إذن $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-3}{x+4} = 2$

(3

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2+2}{1-2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(3x+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-2\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}-2}\right)$$

إذن $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2+2}{1-2x} = +\infty$

(4

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2+2}{1-2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(3x+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-2\right)}$$

$$= \lim \left(\frac{3x+\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}-2}\right)$$

$x \to +\infty$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+2}{1-2x} = -\infty$

تمرين 14: أحسب النهايات التالية:

(1 $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \dfrac{x^2+3}{x-2}$

(2 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \dfrac{x^2+3}{x-2}$

(3 $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -3} \dfrac{-x^2+4}{x+3}$

(4 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -3} \dfrac{-x^2+4}{x+3}$

(5 $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -1} \dfrac{1-x}{x^2+2x+1}$

(6 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \dfrac{1-x}{x^2+2x+1}$

الحـل:

(1 لدينا $\lim\limits_{x \to 2}(x^2+3) = 7$ و $\lim\limits_{x \to 2}(x-2) = 0$

من أجل $x < 2$ يكون لدينا $x-2 < 0$

إذن $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \dfrac{x^2+3}{x-2} = -\infty$

(2 لدينا $\lim\limits_{x \to 2}(x^2+3) = 7$ و $\lim\limits_{x \to 2}(x-2) = 0$

من أجل $x > 2$ يكون لدينا $x-2 > 0$

إذن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \dfrac{x^2+3}{x-2} = +\infty$

(3 لدينا $\lim\limits_{x \to -3}(-x^2+4) = -5$ و $\lim\limits_{x \to -3}(x+3) = 0$

من أجل $x < -3$ يكون لدينا $x+3 < 0$

إذن $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -3} \dfrac{-x^2+4}{x+3} = +\infty$

(4 لدينا $\lim\limits_{x \to -3}(-x^2+4) = -5$ و $\lim\limits_{x \to -3}(x+3) = 0$

من أجل $x > -3$ يكون لدينا $x+3 > 0$

إذن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -3} \dfrac{-x^2+4}{x+3} = -\infty$

$$(5\ \lim_{x \xrightarrow{<} -1} \frac{1-x}{x^2+2x+1} = \lim_{x \xrightarrow{<} -1} \frac{1-x}{(x+1)^2}$$

لدينا $\lim_{x \to -1}(1-x) = 2$ و $\lim_{x \to -1}(x+1)^2 = 0$

من أجل $x < -1$ يكون لدينا $x+1 < 0$ ومنه $(x+1)^2 > 0$

إذن $\lim_{x \xrightarrow{<} -1} \frac{1-x}{x^2+2x+1} = +\infty$

$$(6\ \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{1-x}{x^2+2x+1} = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{1-x}{(x+1)^2}$$

لدينا $\lim_{x \to -1}(1-x) = 2$ و $\lim_{x \to -1}(x+1)^2 = 0$

من أجل $x > -1$ يكون لدينا $x+1 > 0$ ومنه $(x+1)^2 > 0$

إذن $\lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{1-x}{x^2+2x+1} = +\infty$

تمرين 15: أحسب النهايات التالية:

(1 $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+3}$

(2 $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{5-2x}$

(3 $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+2x} - x - 1)$

(4 $\lim_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2+2} - x)$

الحل:

(1 $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+3} = +\infty$

(2 $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{5-2x} = +\infty$

(3 $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+2x} - x - 1) = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+2x} - (x+1))$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x} - (x+1))(\sqrt{x^2+2x} + (x+1))}{\sqrt{x^2+2x} + (x+1)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x} + x + 1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x} + x + 1}$$

إذن $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x-1)=0$

4) $$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+2}-x)(\sqrt{x^2+2}+x)}{\sqrt{x^2+2}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+1}$$

إذن $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2}-x)=1$

تمرين 16: أحسب النهايات التالية:

1) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$ 3) $\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-3x+2}$

2) $\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9}{x+3}$ 4) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$

الحل:

1) لدينا $\lim_{x\to2}(x^2-4)=0$ و $\lim_{x\to2}(x-2)=0$

من أجل x يختلف عن العدد 2، يكون لدينا:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

أي $\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)$$

إذن $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$

2) لدينا $\lim_{x\to-3}(x^2-9)=0$ و $\lim_{x\to-3}(x+3)=0$

من أجل x يختلف عن العدد -3، يكون لدينا:

$$\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}$$

أي $\frac{x^2-9}{x+3}=x-3$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=\lim_{x\to -3}(x-3)$$

إذن $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=-6$

3) لدينا $\lim_{x\to 1}(x^2+3x-4)=0$ و $\lim_{x\to 1}(x^2-3x+2)=0$

من أجل x يختلف عن العددين 1 و 2، يكون لدينا:

$$\frac{x^2+3x-4}{x^2-3x+2}=\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x-2)}$$

أي $\frac{x^2+3x-4}{x^2-3x+2}=\frac{x+4}{x-2}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x+4}{x-2}$$

إذن $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-3x+2}=-5$

4) لدينا $\lim_{x\to 3}(x^2-5x+6)=0$ و $\lim_{x\to 3}(x^2-2x-3)=0$

من أجل x يختلف عن العددين -1 و 3، يكون لدينا:

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}=\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+1)}$$

أي $\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}=\frac{x-2}{x+1}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+1}$$

إذن $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}=\frac{1}{4}$

تمرين 17: أحسب النهايات التالية:

1) $\lim\frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}$ **3)** $\lim\frac{x^2+2x-8}{x^2-7x+10}$

(2 $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2+7x+12}{x^2+5x+4}$ (4 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+8x+12}{x^2+6x+8}$

$x\to -1$ $x\to 2$

الحل:

(1 لدينا $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+2x+1)=0$ و $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+3x+2)=0$

من أجل x يختلف عن العددين -2 و -1، يكون لدينا:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}=\frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

أي $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}=\dfrac{x+1}{x+2}$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x+2}$$

إذن $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+3x+2}=0$

(2 لدينا $\lim\limits_{x\to -4}(x^2+7x+12)=0$ و $\lim\limits_{x\to -4}(x^2+5x+4)=0$

من أجل x يختلف عن العددين -4 و -1، يكون لدينا:

$$\frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+4}=\frac{(x+4)(x+3)}{(x+4)(x+1)}$$

أي $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+5x+4}=\dfrac{x+3}{x+1}$

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+4}=\lim_{x\to -4}\frac{x+3}{x+1}$$

إذن $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+5x+4}=\dfrac{1}{3}$

(3 لدينا $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-8)=0$ و $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-7x+10)=0$

من أجل x يختلف عن العددين 2 و 5 ، يكون لدينا:

$$\frac{x^2+2x-8}{x^2-7x+10}=\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x-5)}$$

أي $\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-7x+10}=\dfrac{x+4}{x-5}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-7x+10}=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x-5}$$

إذن $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{x^2-7x+10}=-2$

(4 لدينا $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+8x+12)=0$ و $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+6x+8)=0$

من أجل x يختلف عن العددين -4 و -2 ، يكون لدينا:

$$\frac{x^2+8x+12}{x^2+6x+8}=\frac{(x+2)(x+6)}{(x+2)(x+4)}$$

أي $\dfrac{x^2+8x+12}{x^2+6x+8}=\dfrac{x+6}{x+4}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+8x+12}{x^2+6x+8}=\lim_{x\to -2}\frac{x+6}{x+4}$$

إذن $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+8x+12}{x^2+6x+8}=2$

تمرين 18: أحسب النهايات التالية:

(1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}$

(2 $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{-x-5}{x^2+8x+15}$

(3 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{x^2-4x+3}$

الحل:

(1 لدينا $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ و $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$

من أجل x يختلف عن العددين -1 و 1، يكون لدينا:

$$\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

أي $\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x+1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$$

إذن $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$

(2 لدينا $\lim\limits_{x\to -5}(-x-5)=0$ و $\lim\limits_{x\to -5}(x^2+8x+15)=0$

من أجل x يختلف عن العددين -5 و -3 ، يكون لدينا:

$$\frac{-x-5}{x^2+8x+15}=\frac{-(x+5)}{(x+5)(x+3)}$$

أي $\frac{-x-5}{x^2+8x+15}=\frac{-1}{x+3}$

$$\lim_{x\to -5}\frac{-x-5}{x^2+8x+15}=\lim_{x\to -5}\frac{-1}{x+3}$$

إذن $\lim_{x\to -5}\frac{-x-5}{x^2+8x+15}=\frac{1}{2}$

3) لدينا $\lim_{x\to 3}(3-x)=0$ و $\lim_{x\to 3}(x^2-4x+3)=0$

من أجل x يختلف عن العددين 1 و 3 ، يكون لدينا:

$$\frac{3-x}{x^2-4x+3}=\frac{-(x-3)}{(x-3)(x-1)}$$

أي $\frac{3-x}{x^2-4x+3}=-\frac{1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\left(-\frac{1}{x-1}\right)$$

إذن $\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{x^2-4x+3}=-\frac{1}{2}$

تمرين 19: أحسب النهايات التالية بدلالة الوسيط الحقيقي m :

(1 $\lim_{x\to 1}\frac{(x-m)^2-m^2}{x}$ **(2** $\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+(1-m)x+m-1}{x^2-3x+2}$

الحـل:

1) من أجل x غير معدوم ، يكون لدينا:

$$\frac{(x-m)^2-m^2}{x}=\frac{x^2-2mx+m^2-m^2}{x}$$

$$=\frac{x(x-2m)}{x}$$

أي $\frac{(x-m)^2-m^2}{x}=x-2m$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-m)^2-m^2}{x}=\lim_{x\to 0}(x-2m)$$

إذن $\lim_{x\to 0}\frac{(x-m)^2-m^2}{x}=-2m$

2) من أجل x يختلف عن العددين 1 و 2 ،يكون لدينا:

$$\frac{x^3-x^2+(1-m)x+m-1}{x^2-3x+2}=\frac{x^2(x-1)+x-mx+m-1}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{x^2(x-1)+(x-1)-m(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{(x-1)(x^2+1-m)}{(x-1)(x-2)}$$

أي $\frac{x^3-x^2+(1-m)x+m-1}{x^2-3x+2}=\frac{x^2+1-m}{x-2}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+(1-m)x+m-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1-m}{x-2}$$

إذن $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+(1-m)x+m-1}{x^2-3x+2}=m-2$

تمرين 20: أحسب النهايات التالية:

(1 $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ **(3** $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi\sin x}{3x}\right)$

(2 $\lim_{x\to-\infty}\sin\left(\frac{\pi x^2+2}{3x^2-1}\right)$

الحل:

(1 بما أن $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$ فإن $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1$

(2 لدينا $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi x^2+2}{3x^2-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi+\frac{2}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}\right)$ أي $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi x^2+2}{3x^2-1}\right)=\frac{\pi}{3}$

بما أن $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi x^2+2}{3x^2-1}\right)=\frac{\pi}{3}$ فإن $\lim_{x\to-\infty}\sin\left(\frac{\pi x^2+2}{3x^2-1}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3 بما أن $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\pi\sin x}{3x}\right)=\frac{\pi}{3}$ و $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\cos x=\frac{1}{2}$ فإن $\lim_{x\to 0}\cos\left(\frac{\pi\sin x}{3x}\right)=\frac{1}{2}$

تمرين 21:

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]2;+\infty[$: $\frac{1}{x-2} \leq \frac{2-\sin x}{x-2} \leq \frac{3}{x-2}$

2) استنتج $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2-\sin x}{x-2} \right)$.

الحـل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]2;+\infty[$ ، يكون لدينا: $-1 \leq \sin x \leq 1$

ومنه $-1 \leq -\sin x \leq 1$

إذن $1 \leq 2-\sin x \leq 3$

وبالتالي $\frac{1}{x-2} \leq \frac{2-\sin x}{x-2} \leq \frac{3}{x-2}$ لأن $x-2>0$

2) من أجل كل x من المجال $]2;+\infty[$ ، لدينا: $\frac{1}{x-2} \leq \frac{2-\sin x}{x-2} \leq \frac{3}{x-2}$

بماأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x-2} = 0$ فإن $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2-\sin x}{x-2} \right) = 0$

تمرين 22:

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $2 \leq 4+2\cos x \leq 6$

2) استنتج $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2+1}{4+2\cos x} \right)$.

الحـل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x ، يكون لدينا: $-1 \leq \cos x \leq 1$

ومنه $-2 \leq 2\cos x \leq 2$

إذن $2 \leq 4+2\cos x \leq 6$

2) من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $2 \leq 4+2\cos x \leq 6$

ومنه $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{4+2\cos x} \leq \frac{1}{2}$

إذن $\frac{x^2+1}{6} \leq \frac{x^2+1}{4+2\cos x} \leq \frac{x^2+1}{2}$

بماأن $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{6} = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{2} = +\infty$ فإن $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2+1}{4+2\cos x} \right) = +\infty$

تمرين 23:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;3[$ بـ: $f(x) = \frac{2x-\cos x}{x-3}$

1) برهن أن: $\frac{2x+1}{x-3} \leq f(x) \leq \frac{2x-1}{x-3}$

2) استنتج $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

الحل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;3[$ ، يكون لدينا: $-1 \le \cos x \le 1$

أي $-1 \le -\cos x \le 1$

ومنه $2x-1 \le 2x-\cos x \le 2x+1$

إذن $\frac{2x+1}{x-3} \le \frac{2x-\cos x}{x-3} \le \frac{2x-1}{x-3}$ لأن $x-3<0$

وبالتالي $\frac{2x+1}{x-3} \le f(x) \le \frac{2x-1}{x-3}$

2) من أجل كل x من المجال $]-\infty;3[$ ، لدينا: $\frac{2x+1}{x-3} \le f(x) \le \frac{2x-1}{x-3}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x-3} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)$$

أي $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x-3} = 2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x-3} = 2$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

تمرين 24:

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $2 \le 5-3\sin x \le 8$

2) استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{|x|+2}{5-3\sin x}\right)$.

الحل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x ، يكون لدينا: $-1 \le \sin x \le 1$

ومنه $-3 \le -3\sin x \le 3$

إذن $2 \le 5-3\sin x \le 8$

2) من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $2 \le 5-3\sin x \le 8$

ومنه $\frac{1}{8} \le \frac{1}{5-3\sin x} \le \frac{1}{2}$

إذن $\frac{|x|+2}{8} \le \frac{|x|+2}{5-3\sin x} \le \frac{|x|+2}{2}$

بماأن $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x|+2}{8} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{|x|+2}{2} = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{|x|+2}{5-3\sin x}\right) = +\infty$

تمرين 25:

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $-5 \le 2\sin x + 3\cos x \le 5$

2) استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{2\sin x + 3\cos x}{x^2+1}\right)$.

الحـل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x ، يكون لدينا:

$-1 \le \sin x \le 1$ و $-1 \le \cos x \le 1$

ومنه $-2 \le 2\sin x \le 2$ و $-3 \le 3\cos x \le 3$

إذن $-5 \le 2\sin x + 3\cos x \le 5$

2) من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $-5 \le 2\sin x + 3\cos x \le 5$

ومنه $-\frac{5}{x^2+1} \le \frac{2\sin x + 3\cos x}{x^2+1} \le \frac{5}{x^2+1}$

بماأن $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\frac{5}{x^2+1}\right) = 0$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{x^2+1} = 0$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{2\sin x + 3\cos x}{x^2+1}\right) = 0$

تمرين 26:

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$: $\frac{1}{2} \le \frac{x}{x+1} \le 1$

2) استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x\sqrt{x}}{x+1}\right)$ ثم $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)}\right)$.

الحـل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$ ،لدينا : $\frac{x}{x+1} - 1 = -\frac{1}{x+1}$

بما أن $-\frac{1}{x+1} \le 0$ فإن $\frac{x}{x+1} - 1 \le 0$

إذن $(1)........\frac{x}{x+1} \le 1$

ولدينا $\frac{1}{2} - \frac{x}{x+1} = \frac{1-x}{2(x+1)}$

بما أن $\frac{1-x}{2(x+1)} \le 0$ فإن $\frac{1}{2} - \frac{x}{x+1} \le 0$

إذن $(2)........\frac{1}{2} \le \frac{x}{x+1}$

من (1) و (2) نجد: $\frac{1}{2} \le \frac{x}{x+1} \le 1$

2) لدينا: $\frac{1}{2} \le \frac{x}{x+1} \le 1$ عندئذ: $\frac{\sqrt{x}}{2} \le \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \le \sqrt{x}$

بماأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{2} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{x\sqrt{x}}{x+1}\right) = +\infty$

لدينا: $\frac{1}{2} \le \frac{x}{x+1} \le 1$ عندئذ: $\frac{1}{2\sqrt{x}} \le \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$

بمأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ فإن $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} \right) = 0$

تمرين 27:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $|f(x)+2| \le \frac{4}{x^2}$

أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

الحـل:

بما أن $|f(x)+2| \le \frac{4}{x^2}$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x^2} = 0$ فإن $\lim_{x \to +\infty} |f(x)+2| = 0$

وبالتالي $\lim_{x \to +\infty} (f(x)+2) = 0$

إذن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$

تمرين 28:

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x) = x^2 + 3x - 4$

1) أحسب $f(1)$ ثم حلل $f(x)$ إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

2) نضع $D = [0;1[\cup]1;2]$.

أثبت أنه من أجل كل x من D، يوجد عدد حقيقي موجب k يحقق: $|f(x)| \le k|x-1|$

3) استنتج مما سبق أن: $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$.

الحـل:

1) $f(1) = 0$.

بما أن $f(1) = 0$ فإن $f(x) = (ax+b)(x-1)$

حيث a و b عددان حقيقيان يطلب تعيينهما.

$f(x) = (ax+b)(x-1)$

عندئذ: $f(x) = ax^2 + (b-a)x - b \;\ldots\ldots\ldots(1)$

$f(x) = x^2 + 3x - 4 \;\ldots\ldots\ldots(2)$

من (1) و (2) نجد: $a=1$ و $b-a=3$ و $-b=-4$

إذن $a=1$ و $b=4$ عندئذ $f(x) = (x+4)(x-1)$

2) من أجل كل x من D، لدينا: $|f(x)| = |x+4| \times |x-1|$

$x \in [0;1[\cup]1;2]$ معناه $(x+4) \in [4;5[\cup]5;6]$

أي $|x+4| \le 6$

ومنه $|x+4| \times |x-1| \le 6|x-1|$

إذن $|f(x)| \le 6|x-1|$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي موجب k حيث $k=6$ يحقق: $|f(x)|\le k|x-1|$

3) بما أن $|f(x)|\le 6|x-1|$ و $\lim\limits_{x\to 1} 6|x-1|=0$ فإن $\lim\limits_{x\to 1}|f(x)|=0$

إذن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

تمرين 29:

نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=x^2-2x-1$

1) نضع $D=[2;3[\cup]3;4]$.

أثبت أنه من أجل كل x من D، يوجد عدد حقيقي موجب k يحقق: $|f(x)-2|\le k|x-3|$

2) استنتج مما سبق: $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

الحـل:

1) من أجل كل x من D، لدينا: $|f(x)-2|=|x^2-2x-3|$

أي $|f(x)-2|=|x+1|\times|x-3|$

$x\in[2;3[\cup]3;4]$ معناه $(x+1)\in[3;4[\cup]4;5]$

أي $|x+1|\le 5$

ومنه $|x+1|\times|x-3|\le 5|x-3|$

إذن $|f(x)-2|\le 5|x-3|$

وبالتالي يوجد عدد حقيقي موجب k حيث $k=5$ يحقق: $|f(x)-2|\le k|x-3|$

2) بما أن $|f(x)-2|\le 5|x-3|$ و $\lim\limits_{x\to 3} 5|x-3|=0$

فإن $\lim\limits_{x\to 3}|f(x)-2|=0$ وبالتالي $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$

تمرين 30:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=(x-2)^2\sin\left(\dfrac{\pi x}{x-2}\right)$

1) تحقق أنه من أجل كل x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$: $|f(x)|\le(x-2)^2$

2) استنتج أن: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$.

الحـل:

1) من أجل كل x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$، لدينا: $\left|\sin\left(\dfrac{\pi x}{x-2}\right)\right|\le 1$

ومنه $(x-2)^2\left|\sin\left(\dfrac{\pi x}{x-2}\right)\right|\le(x-2)^2$

وبالتالي $\left|(x-2)^2\sin\left(\dfrac{\pi x}{x-2}\right)\right|\le(x-2)^2$

إذن $|f(x)| \leq (x-2)^2$

2) بما أن $|f(x)| \leq (x-2)^2$ و $\lim\limits_{x \to 2}(x-2)^2 = 0$

فإن $\lim\limits_{x \to 2}|f(x)| = 0$ وبالتالي $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$

تمرين 31: باستعمال المرافق، أحسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

4) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{5-2x}-3}{x+2}$

الحل:

1) من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq -4$ و $x \neq 0$ ، يكون لدينا:

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{1}{(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+4}+2)}$$

إذن $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \dfrac{1}{4}$

2) من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq -3$ و $x \neq 1$ ، يكون لدينا:

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x+3}+2)}$$

إذن $$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{1}{4}$$

3) من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\geq -2$ و $x\neq 2$ ، يكون لدينا:

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$=\frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$=\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{1}{(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(\sqrt{x+2}+2)}$$

إذن $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\frac{1}{4}$$

4) من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x\leq\frac{5}{2}$ و $x\neq -2$ ، يكون لدينا:

$$\frac{\sqrt{5-2x}-3}{x+2}=\frac{(\sqrt{5-2x}-3)(\sqrt{5-2x}+3)}{(x+2)(\sqrt{5-2x}+3)}$$

$$=\frac{5-2x-9}{(x+2)(\sqrt{5-2x}+3)}$$

$$=\frac{-2(x+2)}{(x+2)(\sqrt{5-2x}+3)}$$

$$\frac{\sqrt{5-2x}-3}{x+2}=-\frac{2}{(\sqrt{5-2x}+3)}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{5-2x}-3}{x+2}=\lim_{x\to -2}\left(-\frac{2}{(\sqrt{5-2x}+3)}\right)$$

إذن $$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{5-2x}-3}{x+2}=-\frac{1}{3}$$

تمرين 32: حول النهايات التالية إلى نهايات عند الصفر،ثم أحسبها.

1) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}$ 　　　 2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

الحل:

1) نضع $x+1=t$ ومنه $x+2=t+1$

إذا كان x يؤول إلى -1 فإن t يؤول إلى 0

ومنه $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t+1}-1}{t}$

من أجل كل عدد حقيقي t حيث $t \geq -1$ و $t \neq 0$، يكون لدينا:

$$\frac{\sqrt{t+1}-1}{t} = \frac{(\sqrt{t+1}-1)(\sqrt{t+1}+1)}{t(\sqrt{t+1}+1)}$$
$$= \frac{t+1-1}{t(\sqrt{t+1}+1)}$$
$$= \frac{t}{t(\sqrt{t+1}+1)}$$
$$\frac{\sqrt{t+1}-1}{t} = \frac{1}{\sqrt{t+1}+1}$$
$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t+1}-1}{t}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t+1}+1}$$

إذن $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

2) نضع $x-5=t$ ومنه $x-1=t+4$

إذا كان x يؤول إلى 5 فإن t يؤول إلى 0

ومنه $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t+4}-2}{t}$

من أجل كل عدد حقيقي t حيث $t \geq -4$ و $t \neq 0$، يكون لدينا:

$$\frac{\sqrt{t+4}-2}{t} = \frac{(\sqrt{t+4}-2)(\sqrt{t+4}+2)}{t(\sqrt{t+4}+2)}$$
$$= \frac{t+4-4}{t(\sqrt{t+4}+2)}$$
$$= \frac{t}{t(\sqrt{t+4}+2)}$$
$$\frac{\sqrt{t+4}-2}{t} = \frac{1}{\sqrt{t+4}+2}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t+4}-2}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t+4}+2}$$

إذن $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{1}{4}$

تمرين 33:

أحسب النهاية التالية: $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$

الـحـل:

من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، لدينا:

$$\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} = \frac{(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x})(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$$

$$= \frac{(1+\sin x)-(1-\sin x)}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$$

$$= \frac{2\sin x}{x(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x})}$$

$$= \left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}\right)$$

لدينا $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ و $\lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}} = 1$

إذن $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} = 1$

تمرين 34:

لتكن f الدالة المعرفة بجدول تغيراتها التالي، f' هي دالتها المشتقة.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\ldots$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $\ldots$	↘	1	↗	$+\infty$

نقبل أن الدالة f معرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$

حيث a ، b و c أعـداد حـقيـقيـة.

1) أحسب $f'(x)$ بدلالة a و c.

2) بالإستعانة بجدول التغيرات ، بين أن: $a=1$ ، $b=-3$ ، $c=1$.

3) أتـمـم جـدول التغيرات بـتـعـيين النـهـايـات المنقوصـة .

4) بين أن المنحنى (C_f) الممثل للـدالة f يقبل المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-3$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

5) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D).

6) عين، في $\mathbb{R}$، عـدد حلول المعادلة $f(x)=m$ حيث m عدد حقيقي معطى.

الحـل:

1) حساب $f'(x)$ بدلالة a و c:

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 2 ، لدينا : $f'(x)=a-\dfrac{c}{(x-2)^2}$

ومنـــه $f'(x)=\dfrac{a(x-2)^2-c}{(x-2)^2}$

$$=\frac{a(x^2-4x+4)-c}{(x-2)^2}$$

إذن $f'(x)=\dfrac{ax^2-4ax+4a-c}{(x-2)^2}$

2) من جدول التغيرات ، نلاحظ أن : $f(1)=-3$ ، $f(3)=1$ ، $f'(1)=0$

$f(1)=-3$ يعني $a+b-c=-3$

$f(3)=1$ يعني $3a+b+c=1$

$f'(1)=0$ يعني $a-c=0$ أي $a=c$

لديـنا: $a+b-c=-3$ ومنه $c+b-c=-3$ ومنه $b=-3$

$3a+b+c=1$ ومنه $3c-3+c=1$ ومنه $c=1$

وبما أن $a=c$ فإن $a=1$

إذن $a=1$ ، $b=-3$ ، $c=1$ عـنـــدئـذ $f(x)=x-3+\dfrac{1}{x-2}$

3) إتـمام جـدول التغيرات بـتـعـيين النـهـايـات المنقوصـة:

الأستاذ : شايبي أمين

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-3+\dfrac{1}{x-2}\right)$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}\left(x-3+\dfrac{1}{x-2}\right)$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-3)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-3)]=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)]=0$

إذن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-3$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

5) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) $f(x)-(x-3)=\dfrac{1}{x-2}$:

إذا كان $x>2$ فإن $x-2>0$ ومنه $f(x)-(x-3)>0$

إذن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (D) على المجال $]2;+\infty[$.

إذا كان $x<2$ فإن $x-2<0$ ومنه $f(x)-(x-3)<0$

إذن المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (D) على المجال $]-\infty;2[$.

6) تعيين عدد حلول المعادلة $f(x)=m$ في $\mathbb{R}$:

- ❖ إذا كان $m<-3$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.
- ❖ إذا كان $m=-3$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا مضاعفا في $\mathbb{R}$.
- ❖ إذا كان $-3<m<1$ فإن المعادلة $f(x)=m$ لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$.
- ❖ إذا كان $m=1$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا مضاعفا في $\mathbb{R}$.
- ❖ إذا كان $m>1$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

تمرين 35:

لتكن الدالة f المعرفة بجدول تغيراتها التالي، f' هي دالتها المشتقة.

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$

$f'(x)$	$+ \quad 0 \quad -$	$- \quad 0 \quad +$
$f(x)$	$\ldots \nearrow -1 \searrow -\infty$	$\ldots \searrow 3 \nearrow +\infty$

نقبل أن الدالة f معرفة على $]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$ بـ: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-3}$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية.

1) أحسب $f'(x)$ بدلالة a و c.

2) بالإستعانة بجدول التغيرات ، بين أن: $a=1$ ، $b=-2$ ، $c=1$.

3) أتمم جدول التغيرات بتعيين النهايات المنقوصة .

4) بين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-2$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

5) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D).

6) عين، في $\mathbb{R}$، عدد حلول المعادلة $f(x)=m$ حيث m عدد حقيقي معطى.

الحل:

1) حساب $f'(x)$ بدلالة a و c:

من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 3 ، لدينا : $f'(x)=a-\dfrac{c}{(x-3)^2}$

$$=\frac{a(x-3)^2-c}{(x-3)^2}$$

$$=\frac{a(x^2-6x+9)-c}{(x-3)^2}$$

إذن $f'(x)=\dfrac{ax^2-6ax+9a-c}{(x-3)^2}$

2) من جدول التغيرات ، نلاحظ أن : $f(2)=-1$ ، $f(4)=3$ ، $f'(2)=0$

$f(2)=-1$ يعني $2a+b-c=-1$

$f(4)=3$ يعني $4a+b+c=3$

$f'(2)=0$ يعني $a-c=0$ أي $a=c$

لديـنا: $2a+b-c=-1$ ومنه $2c+b-c=-1$

ومنه $b+c=-1$

$4a+b+c=3$ ومنه $4a-1=3$ ومنه $a=1$

وبما أن $a=c$ فإن $c=1$

$b+c=-1$ ومنه $b=-1-c$ ومنه $b=-2$

إذن $a=1$ ، $b=-2$ ، $c=1$ عنـــدئـذ $f(x)=x-2+\dfrac{1}{x-3}$

3) إتمام جدول التغيرات بتعيين النهايات المنقوصة:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-2+\dfrac{1}{x-3}\right)$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3}\left(x-2+\dfrac{1}{x-3}\right)$ ومنه $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}3} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x-3}\right)$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-2)]=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-3}\right)$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=0$

إذن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-2$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

5) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) : $f(x)-(x-2)=\dfrac{1}{x-3}$

إذا كـان $x>3$ فـإن $x-3>0$ ومـنه $f(x)-(x-2)>0$

إذن المنحـنى (C_f) يقــع فــوق المســتقيم (D) على المجال $]3;+\infty[$.

إذا كـان $x<3$ فـإن $x-3<0$ ومـنه $f(x)-(x-2)<0$

إذن المنحـنى (C_f) يقــع تحت المســتقيم (D) على المجال $]-\infty;3[$.

6) تعيين عدد حلول المعـادلـة $f(x)=m$ فـي $\mathbb{R}$

- ❖ إذا كـــان $m<-1$ فإن المعادلـة $f(x)=m$ تـقـبـل حـلـين في $\mathbb{R}$.
- ❖ إذا كـــان $m=-1$ فإن المعادلـة $f(x)=m$ تـقـبـل حلا مضاعفا في $\mathbb{R}$.
- ❖ إذا كـــان $-1<m<3$ فـإن المعادلـة $f(x)=m$ لا تـقـبـل حلولا في $\mathbb{R}$.
- ❖ إذا كـــان $m=3$ فـإن المعادلـة $f(x)=m$ تـقـبـل حلا مضاعفا في $\mathbb{R}$.

❖إذا كـــان $m>3$ فـإن المعادلـة $f(x)=m$ تـقـبـل حـلـين في $\mathbb{R}$.

تمرين 36:

نعـتـبـر الدالتين f و g المعرفـتـيـن بجـدولـي تغيـراتـهـما كما يلي:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0

أحسب مايلي :

(1 $(gof)(0)$

(2 $(fog)(1)$

(3 $\lim\limits_{x\to-\infty}(fog)(x)$

(4 $\lim\limits_{x\to+\infty}(gof)(x)$

(5 $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\times g)(x)$

الـحـل:

(1 $(gof)(0)=g[f(0)]$

بما أن $f(0)=0$ و $g(0)=1$ فإن $(gof)(0)=1$

(2 $(fog)(1)=f[g(1)]$

بما أن $g(1)=2$ و $f(2)=-4$ فإن $(fog)(1)=-4$

(3 $\lim\limits_{x\to-\infty}(fog)(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f[g(x)]$

بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to-\infty}(fog)(x)=+\infty$

(4 $\lim\limits_{x\to+\infty}(gof)(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g[f(x)]$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

إذن: $\lim_{x \to +\infty} (gof)(x) = 0$

(5 $\lim_{x \to -\infty} (f \times g)(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) \times \lim_{x \to -\infty} g(x)$

إذن: $\lim_{x \to +\infty} (f \times g)(x) = -\infty$