سلسلة استعد للبكالوريا رقم (01)

السنة الدراسية :2010/2009

المستوى : ثالثة ثانوي

الشعبـــــــة : علوم تجريبية + رياضيات

و تقني رياضي

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

• المحور : النهايات والاستمرارية + التدريب على دراسة دوال و التوظيف •

التمكن من حساب النـــهايات و التفسير البياني

التمرين (01) : اثبت باستعمال التعاريف النهايات التالية :

/1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$ ، /2 $\lim\limits_{x\to+\infty}2x+3=+\infty$

/3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+2}{x+4}=3$ ، /4 $\lim\limits_{x\to 1}(2x+5)=7$

التمرين (02) في كل حالة من الحالات التالية عيّن اكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f ثم احسب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها وعيّن معادلات المستقيمات المقاربة لمنحني الدالة f.

/1 $f(x)=\dfrac{-x^2+4x}{x^2-4x+3}$ ، /2 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x-1}$ ، /3 $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$

/4 $f(x)=\dfrac{-4x+8}{x^2-4x+5}$ ، /5 $f(x)=2x+3-\dfrac{1}{(x+1)^2}$

التمرين (03) في كل حالة من الحالات التالية عيّن اكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f ثم احسب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها وعيّن معادلات المستقيمات المقاربة لمنحني الدالة f.

/1 $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$ ، /2 $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

/3 $f(x)=x-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ ، /4 $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$

/5 $f(x)=x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ ، /6 $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x-2}{2(x^2-1)}$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (04) احسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-3x+2}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x+2}{x^3-3x^2-x+3}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{\dfrac{x-2}{4x+3}}$ ، 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ 6) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-2\sqrt{x}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$ ، 8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$ ، 9) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

التمرين (05) احسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة:

1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-2x\right)$ ، 2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}+x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$ ، 4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}-x\right)$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x+2}}$ ، 6) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x+4}-3}$ ، 7) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)$

التمرين (06) باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+x^3-7x^2+8x-12}{x-2}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2007}-1}{x-1}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$ ، 5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin x-1}{6x-\pi}$ ، 6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$

التمرين (07) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{x+1}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين بيانيا ثم حسابيا نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

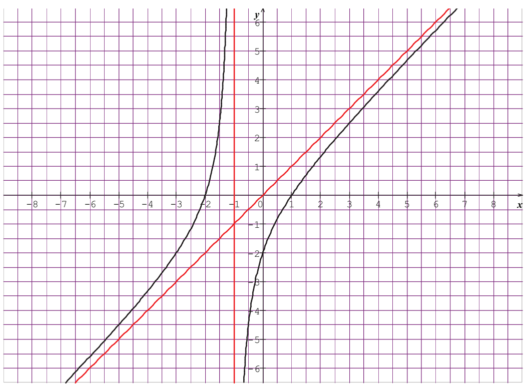
2) أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 ،

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

3) استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني C_f

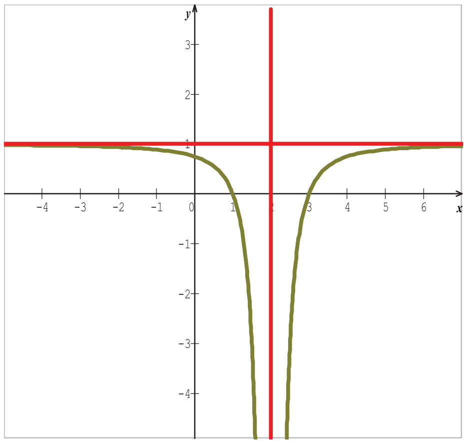
4) حدد الوضع النسبي للمنحني C_f والمستقيم المقارب المائل من البيان ثم تحقق حسابيا



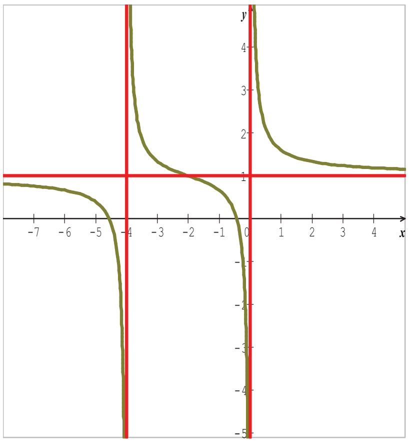
إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (08) في كل حالة من الحالات التالية عيّن D_f مجموعة التعريف والنهايات في حدود المجموعة D_f وشكل جدول التغيرات لكل دالة .

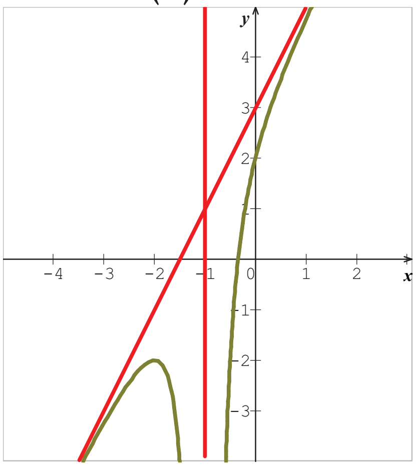
الحالة(1)



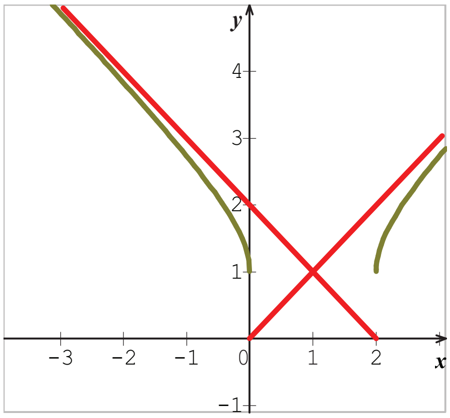
الحالة(2)



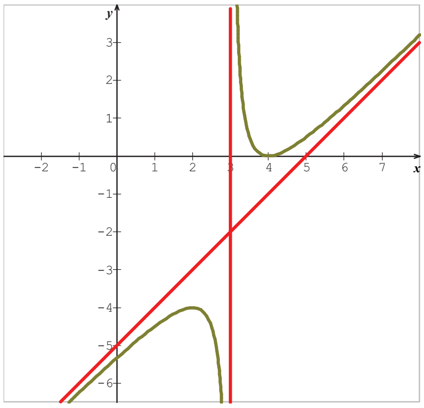
الحالة(3)



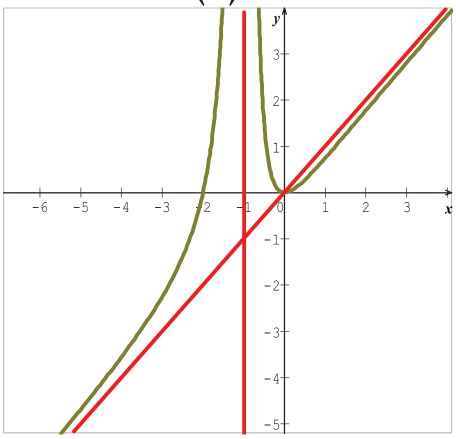
الحالة(4)



الحالة(5)



الحالة(6)



النهايات و المقارنة (الترتيب)

التمرين (09) لتكن f دالة معرفة على $D=[0;+\infty[$ حيث : $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

1) أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا :

$$x^2 \le x^2+x+1 \le (x+1)^2 \quad \text{و} \quad x \le \sqrt{x^2+x+1} \le x+1$$

2) استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا : $1-\dfrac{1}{x+1} \le f(x) \le 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

3) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (10) باستعمال مبرهنات المقارنة احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2-\sin x}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x^2+1}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ،

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x+E(x)\right)$ ، 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x+E(x)\right)$ ، حيث E هي دالة الجزء الصحيح

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin 3x-\cos 2x}{x}$ ، 7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$ ، 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$

التمرين (11) (u_n) متتالية معرفة بـــ :

$$u_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\frac{n}{n^2+3}+\dots\dots\dots+\frac{n}{n^2+n}$$

- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

حساب نهايات باستعمال النهاية : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ أو تعريف العدد المشتق أو تبديل المتغير

التمرين (12) احسب النهايات التالية :

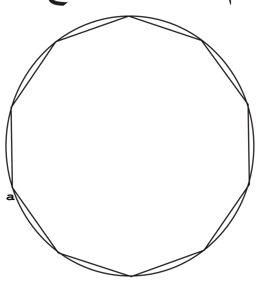
1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$ ، 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ ، 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{bx}$ ، 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$ ،

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$ ، 9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{x-\dfrac{\pi}{6}}$ ، 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{2x}$

التمرين (13) هل تساءلت يوما لماذا مساحة قرص نصف قطره r هي : πr^2 ؟

إليك برهان من بين البراهين : خذ قرص نصف قطره r مركزه O و ارسم داخله مضلع منتظم مركزه O ذي n رأس بحيث رؤوسه تنتمي الى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها r



1- بيّن أن مساحة المضلع تساوي : $\dfrac{1}{2}r^2.n\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$

2- استنتج عندئذ مساحة القرص

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

الاستمـــــــــــــرارية

التمرين (14) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & , \ x \prec 1 \\ \dfrac{1}{x}-1 & , \ x \geq 1 \end{cases}$$

1- ادرس استمرارية الدالة f عند القيمة 1

2- احسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا

3- شكل جدول تغيرات الدالة f ثم ارسم المنحني C_f الممثل للدالة f في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

التمرين (15) f هي الدالة المعرفة على المجال $[-1;+\infty[$ بـــ :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x} & ; x>0 \\ f(x)=\dfrac{1-x^2}{x-2} & ; x \leq 0 \end{cases}$$

1- ادرس استمرارية الدالة f عند القيمة 0

2- استنتج أن الدالة f مستمرة على المجال $[-1;+\infty[$.

التمرين (16) حدد العددين a و b حتى تكون الدالة f المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x-a}{x-2} & ; x>2 \\ f(x)=\dfrac{2x+b}{3} & ; x \leq 2 \end{cases}$$

مستمــــــــــــرة عند القيمة $x_0=2$

التمرين (17) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x^2+\dfrac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

1- ادرس استمرارية الدالة f عند القيمة 0

2- انطلاقا من منحنى ممثل لدالة مرجعية استنتج التمثيل البياني للدالة f

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (18) لتكن الدالة f المعرفة كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-8}{2x-8} & , x\in]-\infty;0[\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{-x^2+3x+4} & , x\in[0;4] \\ x-5+\dfrac{4}{x} & , x\in]4;+\infty[\end{cases}$$

- بيّن أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

التمرين (19) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|} & , x\neq 0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$$

1- بيّن أن f دالة زوجية

2- اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

3- ادرس استمرارية الدالة f على مجموعة تعريفها

4- احسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم فسّر النتائج بيانيا

5- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

6- ارسم المنحني C_f الممثل للدالة f في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

التمرين (20) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ:

$$f(x)=x^2+E\left(\frac{1}{1-E(x^2)}\right)$$

حيث E هي دالة الجزء الصحيح

1/ عيّن D_f مجموعة تعريف f و اكتب $f(x)$ بدون رمز $E(x)$

2/ ادرس استمرارية f عند القيم $x=\pm\sqrt{2}$ و $x=\pm 1$

3/ ادرس تغيرات الدالة f .

4/ ارسم المنحني C_f الممثل للدالة f في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

تعريف : نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n

حيث $n\leq x<n+1$ و نرمز لها بالرمز E أو [ ].

مبرهنة القيم المتوسطة و الدوال الرتيبة تماما وتطبيقات مبرهنة القيم المتوسطة في التعرف على حلول المعادلة : $f(x)=k$

التمرين (21) بيّن أن المعادلات التالية تقبل حلا ، على الأقل ، في المجال I.

1) $X^4+X^2+4X-1=0$ ، $I=[0;1]$

2) $\cos x=x$ ، $I=[0;\pi]$

3) $2\sin x-x=0$ ، $I=\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$

التمرين (22) f دالة معرفة على $I=[1;3]$ بالعبارة $f(x)=-x+2+\frac{3}{x^2}$

1) شكل جدول تغيرات الدالة f على I ثم عيّن $f(I)$

2) ماهو عدد حلول المعادلة $f(x)=\frac{1}{4}$ على I ؟

التمرين (23) f دالة معرفة على $I=[-1;1]$ بالعبارة $f(x)=4x^3-3x-\frac{1}{2}$

1–احسب: $f(1)$ ، $f(0)$ ، $f\left(\frac{-1}{2}\right)$ ، $f(-1)$

2–استنتج عدد حلول المعادلة: $f(x)=0$ في المجال $I=[-1;1]$

التمرين (24) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة على $\mathbb{R}-\{1\}$

بـــ: $f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c حيث من أجل كل x من D_f :

$$f(x)=x+a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

2) ادرس تغيرات الدالة f و بيّن أن المنحنى C_f يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب إعطاء معادلته

3) ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

4) بيّن باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$

5) باستعمال طريقة التنصيف أوجد حصرا لـــ α سعته 0.05 ثم ارسم المنحنى C_f

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (25) 1/ f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث : $f(a) \succ a$ و $f(b) \prec b$.بيّن أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا ، على الأقل ، في المجال $[a;b]$

2/ f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث : $f(a) \prec ab$ و $f(b) \succ b^2$.بيّن أنه يوجد عدد حقيقي c من المجال $[a;b]$ بحيث يكون : $f(c) = bc$

التمرين (26) عيّن جدول إشارات الدالة f علما أنها تنعدم عند القيمتين -5 و 6 وجدول تغيراتها كما يلي :

x	$-\infty$		-3		0		4		$+\infty$
$f(x)$	1	↘	-2	↗	-1	↘	-3	↗	$+\infty$

التمرين (27) f دالة معرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ ، (C_f) تمثيلها البياني و جدول تغيراتها معطى كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ || $+\infty$	↘	2

أجب بـــ :**خطأ** أو **صحيح** على كل سؤال مما يلي مع تبرير الإجابة .

1. المستقيم الذي معادلته $y = 2$ مقارب للمنحني (C_f)
2. المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا .
3. مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \succ 0$ هي $S =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$
4. في المجال $]-\infty;-1[$ يكون : "$f(-2) \succ f(x)$ عندما يكون $x \prec -2$ " .
5. النقطة $A(-3;1)$ تنتمي إلى المنحني (C_f).
6. الدالة f زوجية .

التمرين (28) 1- ادرس تغيرات الدالة $f : x \to x^3 - 3x + 1$ على المجال $[-1;1]$

2- بيّن أن المعادلة : $(E) : x^3 - 3x + 1 = 0$ تقبل حلا وحيد α في المجال $]0;1[$

3- باستعمال آلة حاسبة عيّن قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α

التمرين (29) نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على التوالي على $\mathbb{R}^*$ و $\mathbb{R}$

بـِ: $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=x^2-x+2$.

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0، المعادلة $f(x)=g(x)$

تكافئ المعادلة $x^3-x^2+2x-1=0$.

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ $h(x)=x^3-x^2+2x-1$

- أدرس اتجاه تغير الدالة h على $\mathbb{R}$. أحسب $h(0)$ و $h(1)$.
- برهن أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا c على $\mathbb{R}$. ماذا يمثل بيانيا العدد c
- باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا للحل c سعته 10^{-2}.

التمرين (30) نعتبر الدالتين $f: x \mapsto \sqrt{x+1}$ و $g: x \mapsto -x^3$

- بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f و g على الترتيب يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $-\frac{7}{8}<x_0<-\frac{3}{4}$.

التمرين (31) **الجزء الأول:** نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $g(x)=2x^3+x^2-1$

1. أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيين حصر له سعته 0,1.
3. حدد، حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـِ: $f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{3x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث وحدة الأطوال هي $3cm$.

1. أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$.
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. بين أن $f(\alpha)=\frac{\alpha}{6}+\frac{1}{2\alpha}$ ثم استنتج ، باستعمال حصر العدد α، حصرا للعدد $f(\alpha)$.
5. أرسم المنحني (C_f) (نأخذ $\alpha\approx\frac{2}{3}$).

التمرين (32) n عدد طبيعي غير معدوم.

1) بين أن المعادلة $x^{n+1}-2x^n+1=0$ تقبل حلا محصورا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2 .

2) هل المعادلة $x^8-2x^7+1=0$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$ إذا كان الجواب نعم عين حصرا لهذا الحل.

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

{ التدريب على حل مسائل (دراسة دوال) - الجزء الأول }

تحضير لتمارين البكالوريات

مسألة (01) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفــــة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـــ:

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

1)ادرس تغيرات الدالة f . 2)عيّن المستقيمات المقاربة للمنحني C_f .

3)عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني C_f مع المحورين الإحداثيين

4)ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي

5)أثبت أن المستقيم (Δ)الذي معادلته $x=2$ محور تناظر للمنحني C_f.

6)ارسم المنحني C_f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

مسألة (02) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفــــة بـــ:

$$f(x)=\frac{x^2+5x+2}{x^2+4x}$$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f و اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني C_f

2) اثبت ان النقطة $\omega(-2;1)$ مركز تناظر للمنحني C_f

3) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني C_f في النقطة ω

احسب $f(-1)$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ ثم عيّن نقط تقاطع المنحني C_f مع حامل محور الفواصل ثم ارسم المماس والمنحني C_f

مسألة (03) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفــــة بـــ:

$$f(x)=\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}$$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني C_f مع المحورين الإحداثيين

3/ أثبت صحة المساواة لكل عدد حقيقي x يختلف عن 2 ، $f(2-x)=f(2+x)$

–ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة للمنحني C_f

4/ ارسم المنحني C_f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

5/باستعمال المنحني C_f حدد إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

مسألة (04) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بـــ:

$$f(x)=\frac{x^2-8x+16}{x-3}$$

نسمـــــــي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c حيث من أجل كل x من D_f :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$$

2/ استنتج أن المنحني C_f الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له ثم حدّد وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى Δ.

3/ ادرس تغيرات الدالة f

4/ أوجد إحداثيي النقطة ω تقاطع المستقيمين المقاربين واثبت أنها مركز تناظر للمنحني C_f

5/ ارسم المنحني C_f .

6/ استنتج رسم المنحني C' الممثل للدالة h المعرفة بــــ: $h(x)=\frac{(x-4)^2}{|x-3|}$

مسألة (05) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بـــ:

$$f(x)=2x+3-\frac{1}{(x+1)^2}$$

نسمـــــــي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f واكتب معادلة لكل من المستقيمين المقاربين للمنحني C_f.

2) عيّن وضعية المنحني بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

3) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $\left]\frac{-3}{8};\frac{-1}{4}\right[$.

4) استنتج إشارة $f(x)$ حسب قيم x

5) اكتب معادلة للمماس Δ عند النقطة ذات الفاصلة 0.

6)ارسم المماس Δ و المنحني C_f

مسألة (06) **الجزء الأول:** نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $g(x)=2x^3+x^2-1$

1.أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيين حصر له سعته 0,1.

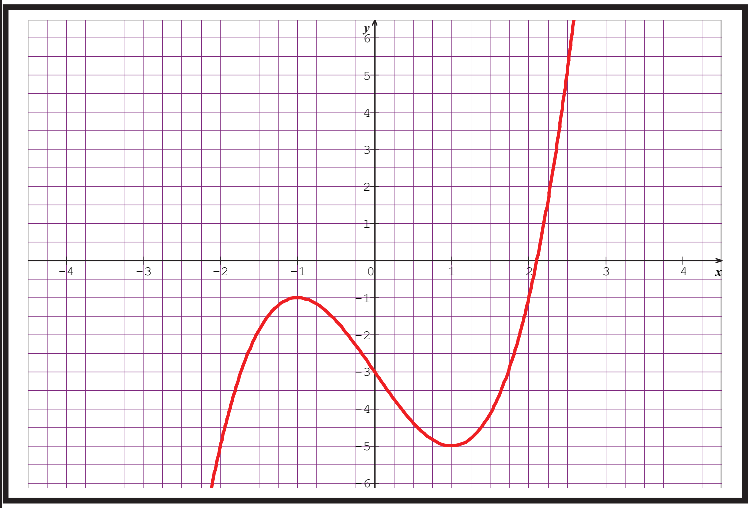
3. حدد، حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـِ: $f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{3x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث وحدة الأطوال هي $3cm$

1. أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$.
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. بين أن $f(\alpha)=\frac{\alpha}{6}+\frac{1}{2\alpha}$ ثم استنتج ، باستعمال حصر العدد α، حصرا للعدد $f(\alpha)$.
5. أرسم المنحني (C_f) (نأخذ $\alpha\approx\frac{2}{3}$).

مسألة (07)



I – المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $\mathbb{R}$كما يأتي : $g(x)=ax^3+bx+c$

1– أوجد الأعداد : $a\ ,b\ ,c$

2– أكتب جدول تغيرات الدالة g

3– بيّن ان المعادلة $x^3-3x-3=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $\left]2\,;\frac{5}{2}\right[$

4– استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II– f دالة معرفة على $D=\mathbb{R}-\{-1\,;1\}$ بالعبارة : $f(x)=\frac{2x^3+3}{x^2-1}+1$

و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1\,;1\}$: $f'(x)=\frac{2x.g(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$

ب) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

ج) احسب النهايات عند حدود D

د) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

هـ) بيّن أن : $f(\alpha)=3\alpha+1$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

و) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (Γ)

ثم ادرس وضعية المنحني (Γ) بالنسبة للمستقيم (Δ)

ي) ارسم (Γ)

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

مسألة (08) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ:

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$$

نسمـــــــــي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ أوجد ثلاثة أعداد حقيقية α ، β و γ بحيث يكون من أجل كل x من D_f :

$$f(x)=\alpha x+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

3/ بيّن أن المنحني C_f يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له

4/ ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

5/ احسب إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني C_f مع حامل محور الفواصل

6/ بيّن أن المنحني C_f يقبل مماسا Δ معامل توجيهه 1. اكتب معادلة لـــ Δ

7/ أنشئ المماس Δ و المنحني C_f

8/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=x+m$

مسألة (09) I) P(x) كثير حدود حيث : $P(x)=-x^3+6x^2-13x+8$

1/ احسب $P(1)$ واستنتج تحليلا لكثير الحدود $P(x)$

2/ ادرس إشارة $P(x)$ حسب قيم x

II) f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بـــــ: $f(x)=-x+1+\frac{x-1}{(x-2)^2}$

1- عيّن مجموعة التعريف D_f للدالة f

2- بيّن أنه مهما يكن العدد الحقيقي x من D_f فإن : $f'(x)=\frac{P(x)}{(x-2)^3}$

3- ادرس تغيرات الدالة f

4- بيّن أن المنحني C_f الممثل للدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

5- ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

6- اكتب معادلة المماس (T) للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 3.

7- ارسم المستقيمين (T) و (Δ) والمنحني C_f

مسألة (10) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$$

1/ ادرس تغيرات الدالة f

نسمـــــــــي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2/ بيّن أن المستقيم ذي المعادلة $y=2x$ هو مقارب مائل للمنحني C_f بجوار $(+\infty)$.

3/ اكتب معادلة المماس (T) للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 0.

4/ ارسم المماس (T) و المنحني C_f

5/ باستعمال المنحني C_f استنتج رسم المنحني (Γ) الممثل للدالة : $g(x)=|x|+\sqrt{x^2+1}$

مسألة (11) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة على $]-1;+\infty[$ كما يأتي :

$$f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

(C_f) منحني الدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدّالة f

2) أ- بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته : $y=x$

ب-ادرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) و (D) .

3) أ- بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث : $1.3 \prec x_0 \prec 1.4$.

ب- عين معادلة (Δ) مماسا للمنحني (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب .

ج- أرسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم .

4) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $g(x)=|f(x)|$

(C_g) منحني الدالة g في المعلم السابق .

- بيّن كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ، ثم أرسمه في نفس المعلم السابق .

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $g(x)=m^2$

مسألة (12) $(O;\vec{i};\vec{j})$ معلم متعامد للمستوي ، وحدة الرسم هي $1cm$.

نعتبر الدالة u المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـِ : $u(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ نسمي $\mathcal{C}$ تمثيلها البياني .

1. أ ــ عيّن نهاية الدالة u عند $-\infty$.

ب ــ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا : $u(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

- استنتج نهاية الدالة u عند $+\infty$

2. أ ــ بيّن أنّ $[u(x)+2x]$ تؤول إلى 0 عندما x يؤول إلى $-\infty$.

ب ــ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $u(x)>0$. استنتج إشارة $[u(x)+2x]$.

جـ ــ فسّر هذه النتائج بيانيا .

3 . بيّن أن : $u'(x)=\dfrac{-u(x)}{\sqrt{x^2+1}}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة u

4. أرسم $\mathcal{C}$ ومستقيمه المقارب المائل

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

مسألة (13) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بــ:

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+10x+5}{(x+1)^2}$$

نسمـــــي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ أوجد ثلاثة أعداد حقيقية α ، β و γ بحيث يكون من أجل كل x من D_f :

$$f(x)=x+\alpha+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

2/ استنتج أن المنحني C_f الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له ثم حدّد وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى Δ.

3/ ادرس تغيرات الدالة f

4/ عيّن عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ثم ارسم المنحني C_f

5/ استعمل C_f ، عيّن حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة :

$$3x^2+(x-m)x^2+(10-2m)x+5-m=0$$

6/ g الدالة المعرفة بـــ : $g(x)=\dfrac{|x|^3+3x^2+10|x|+5}{(|x|+1)^2}$

أ) بيّن أن الدالة g زوجية

ب) بيّن أن المنحني (Γ) الممثل للدالة g يستنتج بسهولة من رسم المنحني C_f –ارسم (Γ)

مسألة (14) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بــ: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$

1/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث المنحني (γ) تمثيلها البياني يشمل النقطة $D(0;-3)$ وتكون النقطة $E(-1;-2)$ ذروة للمنحني (γ) .

2/ بيّن أن الدالة المعرفة في السؤال 1) هي الدالة : $x\to\dfrac{x^2+3}{x-1}$

–ادرس تغيرات الدالة f واكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (γ)

3/ بيّن أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين ω مركز تناظر للمنحني (γ)

4/ ارسم المنحني (γ) في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

5/ لتكن الدالة h المعرفة بـــ: $h(x)=\dfrac{x^2+3}{|x-1|}$ (γ') تمثيلها البياني

بيّن أن المنحني (γ') يستنتج بسهولة من رسم (γ) ثم ارسم (γ')

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

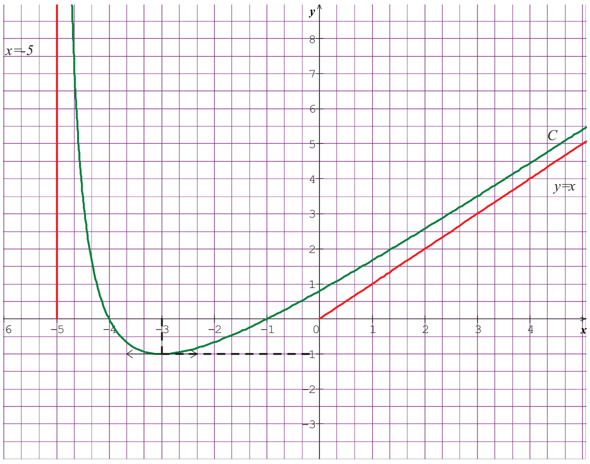
مسألة (15)

I . f دالة معرفة على $I=]-5;+\infty[$ بـ :

$f(x)=\dfrac{x^2+5x+4}{x+5}$ ، (C_f) تمثيلها البياني

في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

كما هو مبين في الشكل .



1) أ- احسب نهايات f عند الحدود المفتوحة لـ I

ب- بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات f

شكل جدول تغيراتها .

2) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\infty;-5[$ بالعبارة : $g(x)=\dfrac{x^2+5x+4}{-x-5}$

(C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

أ- احسب نهاية g عند حدود مجموعة تعريفها .

ب- تحقق من أن (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له

جـ - ادرس تغيرات g

II k دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-5\}$ كما يلي : $k(x)=\dfrac{x^2+5x+4}{|x+5|}$

1) اكتب $k(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة

2) من نتائج الجزء الأول شكل جدول تغيرات الدالة k

3) ارسم (C_k) المنحنى الممثل للدالة k في معلم متعامد ومتجانس

مسألة (16)

g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$g(x)=3x+\frac{1}{(x+1)^3}$$

نسمي (Γ) المنحنى الممثل للدالة g في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) 1/ ادرس تغيرات الدالة g واكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (Γ)

2/ ادرس وضعية المنحنى (Γ) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

3/ أثبت أن النقطة ω تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر للمنحنى (Γ)

3/ ارسم المنحنى (Γ) واستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

II) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ: $f(x)=\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{2(x+1)^2}$

نسمي C_f المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ عيّن D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم بيّن أنه لكل x من D_f : $f'(x)=g(x)$

2/استنتج جدول تغيرات الدالة f

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

3/ أثبت أن المنحني C_f يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α حيث: $\alpha \in]0;1[$

4/ عيّن حصرا لـــــ α سعته 0.25

5/ (P) المنحني الممثل للدالة p حيث : $p(x)=\frac{3}{2}x^2$

–بيّن أن (P) و C_f متقاربان ب– احسب $f\left(\frac{-3}{2}\right)$ وارسم المنحني C_f

مسألة (17) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ:

$$f(x)=\frac{4(x-1)}{(x-2)^2}$$

نسمـــــــي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) 1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني C_f عند نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل.

3/ بيّن أن المماس (Δ) يقطع المنحني C_f في نقطة B يطلب تعيين إحداثيتها.

4/ احسب : $f(-2)$ ، $f(-1)$ ، $f(3)$ و $f(4)$ ثم ارسم بدقة المماس (Δ) ثم المنحني C_f.

ب) m وسيط حقيقي ، (Δ_m) مستقيم معادلته : $y=4x+m$

– ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد النقط المشتركة بين المنحني C_f و (Δ_m)

مسألة (18) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$$

نسمـــــــي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1– g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $g(x)=x^3-3x-4$

أ) ادرس تغيرات الدالة g .

ب) اثبت أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α بحيث : $g(\alpha)=0$ ، ثم عين قيمة مقربة إلى 10^{-2}

جـــ) ادرس إشارة g على $\mathbb{R}$

2–أحسب نهايات الدالة عند حدود كل مجالات مجموعة تعريفها.

3**–**بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $f'(x)=\frac{x.g(x)}{\left(x^2-1\right)^2}$

4**–**استنتج جدول تغيرات الدالة f .

5**–**برهن أنه من أجل x من $\mathbb{R}-\{-1;1\}$: $f(x)=x+2+\frac{x+2}{x^2-1}$

– استنتج أن المنحني C_f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

– ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى المستقيم (D) .

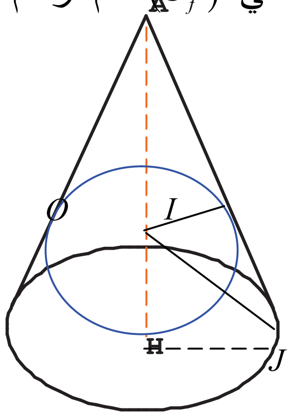
6– ارسم (D) و C_f

{ التدريب على حل مسائل : توظيف الدوال العددية لحل مشكل }
وضعيات ادماجية- الجزء الأول - مسائل الإستمثال

تمرين (01) : f دالة معرفة على المجال $D=]2;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1}{2}x+1+\frac{2}{x-2}$

وليكن (C_f) منحنيها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1/ ادرس تغيرات الدالة f واكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f). ثم ارسم (C_f)



2/ مثلنا في الشكل المقابل مخروطا (Γ) ارتفاعه h ،

نصف قطر قاعدته r ومحيطا بسطح كرة التي مركزها O

ونصف قطرها 1. النقط A ، O ، I ، H ، J تنتمي إلى

نفس المستوي حيث $(OI)\perp(AJ)$ و $(AH)\perp(HJ)$.

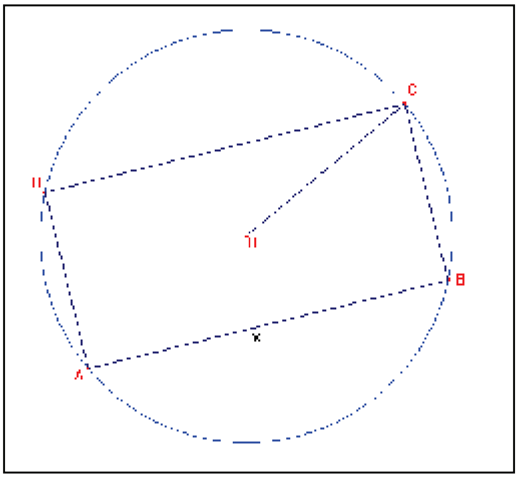
نضع : $g(h)=\frac{1}{2}V(h)$ حيث $V(h)$ هو حجم المخروط (Γ)

– تحقق أن $h\succ 2$

– احسب $V(h)$ بدلالة h ثم باستعمال نتائج السؤال 1 عيّن h

بحيث يكون $V(h)$ اصغر ما يمكن.

تمرين (02) قطعة أرض دائرية الشكل نصف قطرها 10m



أراد صاحبها أن يبني عليها منزلا قاعدته مستطيلة الشكل.

نضع $AB=x$.

1. احسب مساحة قاعدة هذا المنزل بدلالة x.

2. عين x بحيث تكون هذه المساحة أكبر ما يمكن؟

تمرين (03) شاحنة تقطع مسافة $200\ km$ بسرعة v مقدرة بــ km/h ، الشاحنة تستهلك :

$\left(5+\frac{v^2}{320}l/h\right)$ من الوقود . ثمن الوقود هو $16DA$ للتر الواحد ويتقاضا السائق أجرتا تقدر بــ

$100DA$ في الساعة.

1) نسمي t زمن الرحلة. عبر عن t بدلالة v

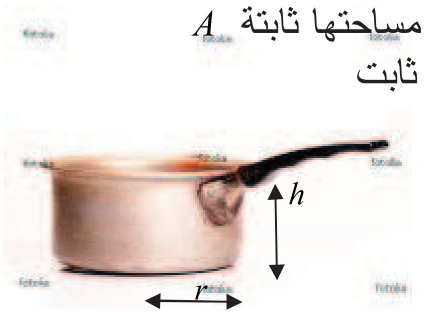
2) احسب الكلفة $P(v)$ بدلالة v

3)ماهي سرعة الشاحنة حتى تكون الرحلة أقل تكلفة.

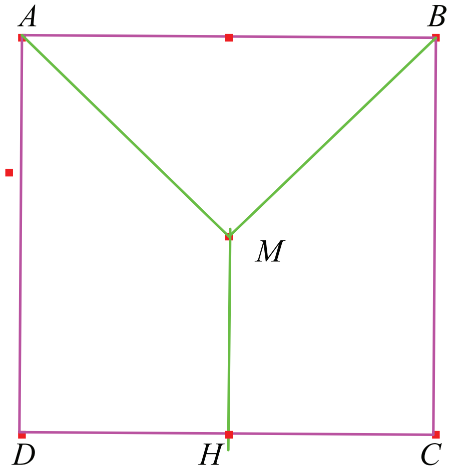
إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

تمرين (04) مصنع ألمنيوم يريد صنع أواني طبخ منزلية اسطوانية الشكل نصف قطرها r
كما هو موضح في الشكل المقابل. خصص لكل إناء صفيحة معدنية مساحتها ثابتة A
نفرض أنه لا يوجد غطاء وأنه لا يوجد نفاية للمعدن أي سمك الإناء ثابت
ما هو الارتفاع المناسب h بحيث يكون حجم الإناء اكبر ما يمكن ؟

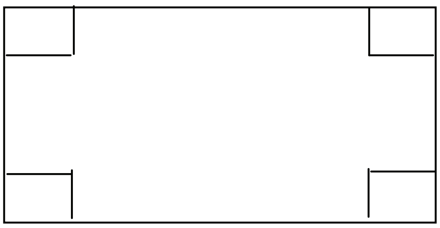
(problème de la casserole)



تمرين (05) يملك عبد الله أرض مربعة الشكل طول ضلعها $15m$ أراد أن يصنع خزان للماء في النقطة M الواقعة على محور $[AB]$ يملأ هذا الخزان بواسطة أنابيب من المنابع A و B و H منتصف $[CD]$.
يريد عبد الله المساعدة في تحديد النقطة M التي من أجلها تكون تكلفة المشروع اقل ما يمكن .



تمرين (06) انطلاقا من مستطيل بعداه 16 و 10 بالسنتيمترات
نصنع علبة على شكل متوازي مستطيلات قائم بالكيفية التالية: من كل ركن من المستطيل نقطع مربعا طول ضلعه يساوي x ثم نرفع الجوانب بالطي .
-حدد قيمة x ليكون حجم العلبة اكبر ما يمكن ؟



تمرين (07) نريد صنع علبة مصبرات اسطوانية الشكل (بغطاء) ذات حجم V معطى
- اوجد النسبة بين الإرتفاع h ونصف القطر r حتى نستعمل اقل مايمكن من المعدن
(علبة اقتصادية الصنع)

problème de la boite de conserve

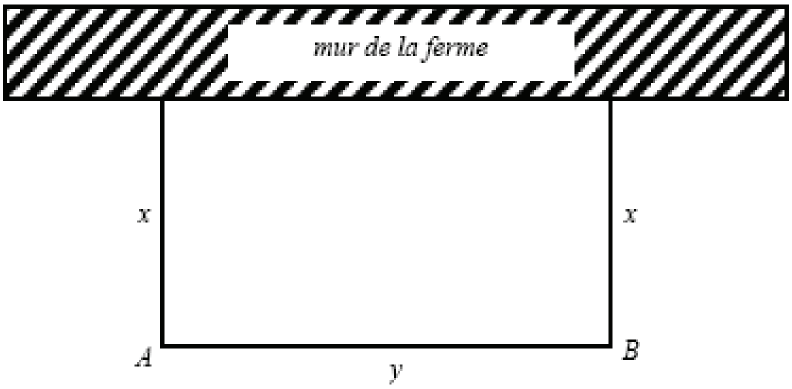
تمرين (08): لتحديد حيز مستطيل الشكل للاصطياف
على شاطئ البحر ثبت حبل طوله 40 مترا بواسطة اربعة أوتاد A, B, C, D على أن يكون طرفا الحبل هما D , A
(كما في الشكل) نفرض أن : $AB = x$, $BC = y$
ما هو طول وعرض الحيز حتى تكون مساحته أعظمية ؟

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

تمرين (09) : أراد فلاح إنشاء مدجنة مستطيلة الشكل مساحتها $392m^2$ أحد جدرانها حائط ضيعته كما هو مبين في الشكل

نرمز لبعد كل من الوتدين A وB عن الحائط بالرمز x و نرمز للبعد بين الوتدين A وB بالرمز y

أين يمكن وضع الوتدين A و B حتى يكون سياج المدجنة أصغر ما يمكن ؟



تمرين (10) نعتبر في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. النقط $A(-1;2)$ ، $B(-1;0)$ ، $C(0;2)$ و $M(x;0)$ حيث $x \prec -1$ المستقيم (AM) يقطع محور التراتيب في النقطة N .

1. احسب بدلالة x كل من ترتيب النقطة N ومساحات المثلثات OMN ، CAN ، ABM.

2. لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;-1[$ بـــ: $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ وليكن (C_f) منحنيها في المعلم

أ) بتقسيم المثلث OMN بشكل مناسب عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل x من $]-\infty;-1[$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$

ب) ادرس تغيرات f على المجال $]-\infty;-1[$

جـــ) تحقق ان (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D_1) و (D_2) يطلب تحديدهما. د) ارسم (C_f)

هـــ) ما هي قيمة x التي تكون من أجلها مساحة المثلث OMN أصغر ما يمكن ؟

و) احسب عندئذ هذه المساحة.

الهدية

النجاح مطلب الجميع وتحقيق النجاح الدراسي يعتبر من أولويات الأهداف لدى الطالب ..ولكل نجاح مفتاح وفلسفة وخطوات ينبغي الاهتمام بها... ولذلك <u>أصبح النجاح علما و هندسة</u>

1- الطموح كنز لا يفنى :

لا يسعى للنجاح من لا يملك طموحا ولذلك كان الطموح هو الكنز الذي لا يفنى ..فكن طموحا وانظر إلى المعالي..

2- العطاء يساوي الأخذ :

النجاح عمل وجدّ وتضحية وصبر ومن منح طموحه صبرا وعملا وجدا حصد نجاحا وثمارا ..فاعمل واجتهد وابذل الجهد لتحقق النجاح والطموح والهدف ..فمن جدّ وجد ومن زرع حصد..

<u>وقل من جد في أمر يحاوله وأستعمل الصبر إلا فاز بالظفر</u>

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

سلسلة استعد للبكالوريا رقم (06)

المستوى : ثانية ثانوي — السنة الدراسية :2009/2008

الشعبـــــــة :علوم تجريبية + رياضيات

و تقني رياضي

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

•المحور : النهايات + دراسة دوال و مسائل•

مفاهيم و تطبيقات على استعمال التعاريف و القراءة البيانية

التمرين (01) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;3[\cup]3;6]$ بالعبارة : $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$

1/ ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغير اتها.

2/ أكمل الجدول التالي :

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	3.0001	3.001	3.01
$f(x)$							

3/ ماذا تلاحظ ؟

4/ بين أنه حتى يكون $f(x)\geq 10^8$ يكفي أن يكون x عنصرا من $\left]3;3+10^4\right[\cup\left]3-10^{-4};3\right[$

5/ أثبت أن : $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=+\infty$ ثم أكمل جدول التغيرات

6/ ارسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

التمرين (02) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بالعبارة : $f(x)=1+\dfrac{1}{x-3}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول التغيرات

2/ عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني C_f مع المحورين

3/بين انه يمكن استنتاج رسم C_f انطلاقا من التمثيل البياني لدالة مرجعية.

4/ارسم المستقيمين المعرفين بالمعادلتين : $x=3$ و $y=1$ ثم ارسم C_f .

4/ ما هو تخمينك لـــ : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}f(x)$ ثم أكمل جدول التغيرات ثم أثبت أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ <}}f(x)=-\infty$

التمرين (03) اثبت باستعمال التعاريف النهايات التالية :1/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=+\infty$

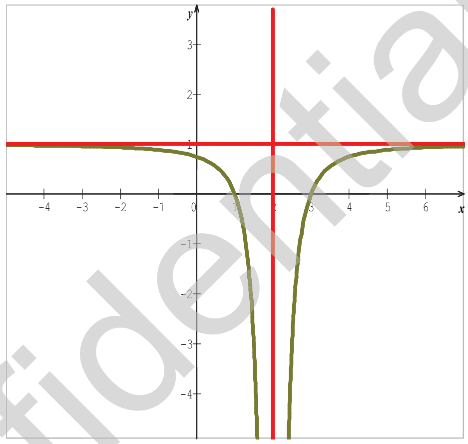
2/ $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\dfrac{1}{(x-3)}=+\infty$ ، 3/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$ ، 4/ $\lim\limits_{x\to 1}(2x+5)=7$

التمرين (04) اثبت باستعمال التعاريف النهايات التالية :

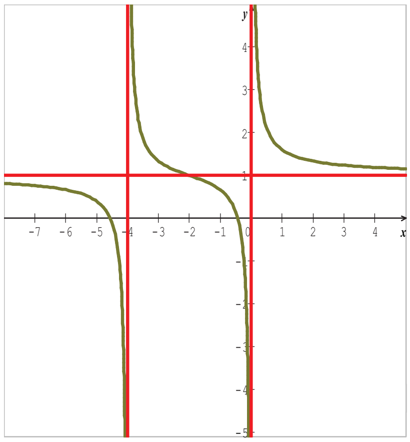
$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{1}{(x-2)} = -\infty$ /1 ، $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$ /2 ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2$ /3

التمرين (05) في كل حالة من الحالات التالية عيّن D_f مجموعة التعريف والنهايات في حدود المجموعة D_f.و عين معادلات المستقيمات المقاربة ثم اكتب جدول تغيرات الدالة f

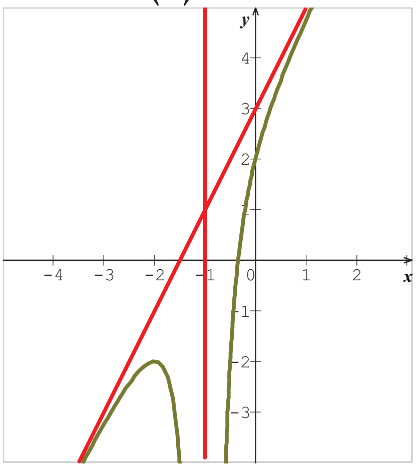
الحالة(1)



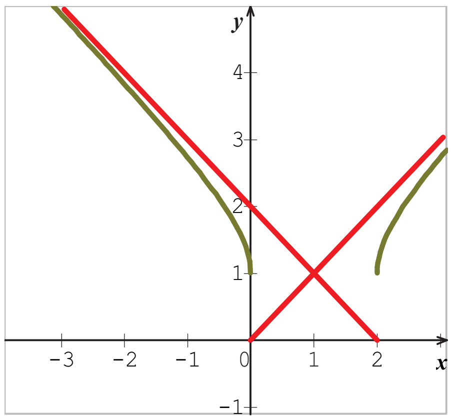
الحالة(2)



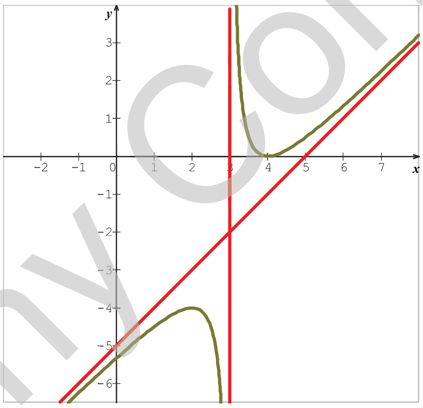
الحالة(3)



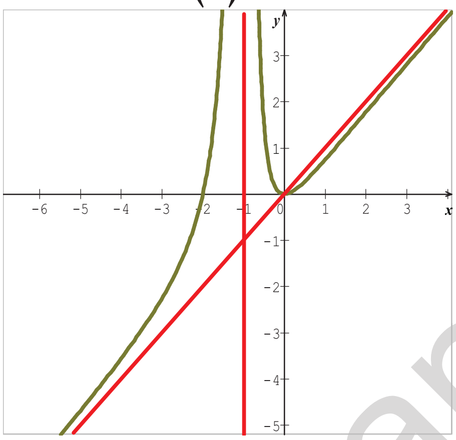
الحالة(4)



الحالة(5)



الحالة(6)



التمكن من حساب النهايات و التفسير البياني

التمرين (06) احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^2+3x-1)$ ، 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3+3x^2-x+3)$ ، 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x-1}{3x+5}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+3x-1}{3x+5}$ ، 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x-1}{3x^2+5x}$ ، 6) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\frac{2x-3}{x}$ ، 7) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1}\frac{x+1}{2x^2+x-3}$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (07) f دالة معرفة بالعبارة : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$

1) عين D اكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f . 2) احسب النهايات عند حدود D

التمرين (08) f دالة معرفة بالعبارة : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-2x-3}$

1) عين D اكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f . 2) احسب النهايات عند حدود D

التمرين (09) f دالة معرفة بالعبارة : $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+x}$

1) عين D اكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f

2) احسب النهايات عند حدود D ثم أكد إن كان منحني الدالة f يقبل مستقيمات مقاربة

التمرين (10) في كل حالة من الحالات التالية عيّن اكبر مجموعة تعريف ممكنة D الدالة f ثم احسب النهايات عند حدود مجموعة تعريفها D واكد إن كان منحني الدالة f يقبل مستقيمات مقاربة معينا معادلاتها

1/ $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ ، 2/ $f(x)=\dfrac{-3x+2}{x+1}$ ، 3/ $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$

4/ $f(x)=\dfrac{-x^2+4x}{x^2-4x+3}$ ، 5/ $f(x)=4+\dfrac{1}{x-2}$ ، 6/ $f(x)=\dfrac{-4x+8}{x^2-4x+5}$

التمرين (11) في كل حالة من الحالات التالية عيّن اكبر مجموعة تعريف ممكنة D الدالة f ثم احسب النهايات عند حدود مجموعة تعريفها D وعين معادلات المستقيمات المقاربة لمنحني الدالة .

1) $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x-2}$ ، 2) $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$

3) $f(x)=2x+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{3-x}$ ، 4) $f(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$

التمرين (12) f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2+x-3}{x+1}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

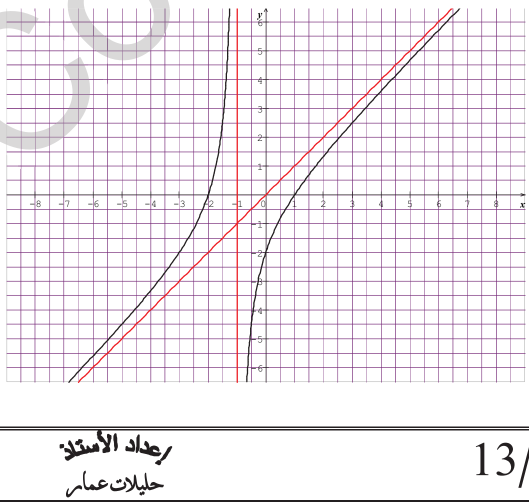
1) عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

2) أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 ، $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

3) استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحني C_f

4) حدد الوضع النسبي للمنحني C_f والمستقيم المقارب المائل



إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (13) احسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة :

1) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ ، 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x-2}{4x+3}}$ ، 3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ، 4) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x+4}-3}$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-2x\right)$ ، 6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x+2}+x\right)$ ، 7) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$

8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$ ، 9) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ ، 10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{x}}{x+1}$

التمرين (14) لتكن f دالة معرفة على $D=[0;+\infty[$ حيث : $f(x)=\sqrt{x+3}-\sqrt{x}$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من D لدينا : $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}}$

2) برهن أنه من اجل كل عدد حقيقي x من D : $0 \le f(x) \le \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

3) استنتج نهاية f عندما x يؤول إلى $+\infty$

التمرين (15) لتكن f دالة معرفة على $D=[0;+\infty[$ حيث : $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

1) أكمل الجدول التالي :

x	10^4	10^6	10^{10}	10^{12}	10^{20}	10^{40}
$f(x)$						

2) أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا :

$x^2 \le x^2+x+1 \le (x+1)^2$ و $x \le \sqrt{x^2+x+1} \le x+1$

3) استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا :

$$1-\frac{1}{x+1} \le f(x) \le 1+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

4) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

التمرين (16) لتكن f دالة معرفة على $D=[0;+\infty[$ حيث : $f(x)=\dfrac{x^2+\sin x}{x}$

1) برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x من D يكون : $\dfrac{x^2-1}{x} \le f(x) \le \dfrac{x^2+1}{x}$

2) احسب : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2-1}{x}$ ثم استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

التمرين (17) (u_n) متتالية معرفة بـــ :

$$u_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\frac{1}{n^2+3}+........+\frac{1}{n^2+n}$$

– احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

تمارين شاملة لدراسة دوال

دوال كثيرات الحدود

التمرين(01) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــالعبارة : $f(x)=x^3+3x^2-4$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدالة f ثم أنجز جدول التغيرات
2) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات
3) برهن أن النقطة $\omega(-1;-2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f)
4) عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω .
5) ارسم (T) و (C_f)
6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $x^3+3x^2-4-m=0$

التمرين(02) f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$g(x)=-x^2+2x+3$ و $f(x)=x^2-x-2$

1- ادرس تغيرات كل من الدالتين التاليتين f و g
(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان على الترتيب في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

2- عين نقط تقاطع كل من المنحنيين (C_f) و (C_g) مع المحورين
3- أثبت أن المستقيم الذي معادلته $x=1$ محور تناظر للمنحني (C_g)
4- ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) ثم ارسمهما.

التمرين(03) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــالعبارة : $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-3x+b$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. a و b عددان حقيقيان

1) عين العددين a و b حتى الدالة f تقبل قيمة حدية عند 3 قيمتها -8
2) نفرض أن : $a=-1$ و $b=1$

أ) ادرس تغيرات الدالة f
ب) احسب : $f(5)$,$f(1)$,$f(0)$, $f(-2)$
ج) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة I التي فاصلتها 1.
د) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المماس (Δ) . ماذا تستنتج ؟
هـ) ارسم المماس (Δ) و (C_f)

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

التمرين(04) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــالعبارة : $f(x)=ax^4+bx^2$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. a و b عددان حقيقيان

1) أثبت ان الدالة f زوجية

2) عين العددين a و b إذا علمت أن النقطة $(1;1)$ ذروة للمنحني (C_f)

3) ادرس تغيرات الدالة f

4) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المحورين ثم ارسم المنحني (C_f)

التمرين(05) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــالعبارة : $f(x)=x^3-3x^2$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) اوجد معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 1

3) بين أن للمنحني (C_f) مماسين (T_1) و (T_2) ميل كل منهما 9 يطلب إيجاد معادلتيهما.

4) ارسم المماسات (Δ) ، (T_1) و (T_2) ثم المنحني (C_f)

التمرين(06) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــالعبارة : $f(x)=-x^3+6x^2-9x+4$

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) برهن أن النقطة $\omega(2;2)$ مركز تناظر للمنحني (C_f)

3) أثبت ان المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $\omega(2;2)$

4) ارسم C_f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

5) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــالعبارة : $g(x)=-x^2|x|+6x^2-9|x|+4$

أ – أدرس شفعية الدالة g

ب– بين أنه يمكن استنتاج المنحني (C_g) الممثل للدالة g انطلاقا من المنحني C_f ثم ارسم (C_g)

التمرين(07) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــالعبارة : $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ بين أن للمنحني (C_f) مماسين (T_1) و (T_2) يشملان النقطة $A\left(\frac{5}{2};2\right)$ يطلب تعيين معادلتيهما.

3/ ارسم (T_1) و (T_2) ثم المنحني (C_f)

4/ اكتب معادلة للمستقيم (Δ_m) الذي يشمل النقطة A و معامل توجيهه m

5/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة : $f(x)=m\left(x-\frac{5}{2}\right)+2$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

دوال ناطقــــــــة

التمرين (08) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـــالعبارة : $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f ثم اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f)

2/ عين إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني (C_f) مع المحورين الإحداثيين

3/ بين أن للمنحني (C_f) مماسين (T_1) و (T_2) معامل توجيه كل منهما 3 يطلب إيجاد معادلتيهما

4/ أثبت أن النقطة I تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر للمنحني (C_f)

5/ ارسم (T_1) و (T_2) ثم المنحني (C_f)

التمرين (09) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـــالعبارة : $f(x)=a+\dfrac{b}{x-3}$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ عين العددين a و b إذا علمت أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور التراتيب في النقطة التي ترتيبها $\dfrac{4}{3}$ و يقبل المستقيم الذي معادلته $y=2$ مقاربا

2/ نفرض أن : $a=2$ و $b=2$. أ) ادرس تغيرات الدالة f

ب) عين إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني (C_f) مع المحورين الإحداثيين

ج) بين أن للمنحني (C_f) مماسين (T_1) و (T_2) معامل توجيه كل منهما يساوي -2 يطلب إيجاد معادلتيهما . هـ) ارسم (T_1) و (T_2) ثم المنحني (C_f)

التمرين (10) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــالعبارة : $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+2x+2}$

a و b عددان حقيقيان . (C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) عين العددين a و b بحيث المنحني (C) يقبل عند النقطة $A\left(0;\dfrac{7}{2}\right)$ مماسا يوازي محور الفواصل . ثم بين أن : $f(x)$ تكتب على الشكل : $f(x)=1+\dfrac{5x+5}{x^2+2x+2}$

2) ادرس تغيرات الدالة f ثم أنجز جدول التغيرات

3) بين ان المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب (Δ) يطلب إعطاء معادلته

4) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات.

5) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

6) نسمي ω نقطة تقاطع المنحني (C_f) و (Δ) ، برهن أن النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f)

7) عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω .

8) ارسم (T) و (Δ) ثم (C_f)

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين(11) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بـــ:

$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

1)ادرس تغيرات الدالة f

1) عيّن المستقيمات المقاربة للمنحني C_f .

2) عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني C_f مع المحورين الإحداثيين

3) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي

4) أثبت أن المستقيم (Δ)الذي معادلته $x=2$ محور تناظر للمنحني C_f.

6) ارسم المنحني C_f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

التمرين(12) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بـــ:

$$f(x)=\frac{x^2+5x+2}{x^2+4x}$$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f و اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني C_f

2) اثبت ان النقطة $\omega(-2;1)$ مركز تناظر للمنحني C_f

3) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني C_f في النقطة ω

احسب $f(-1)$ ، $f(1)$ ، $f(2)$ ثم عيّن نقط تقاطع المنحني C_f مع حامل محور الفواصل ثم ارسم المماس والمنحني C_f

التمرين(13) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بـــ:

$$f(x)=\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}$$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني C_f مع المحورين الإحداثيين

3/ أثبت أن المستقيم (Δ)الذي معادلته $x=2$ محور تناظر للمنحني C_f.

4/ ارسم المنحني C_f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

5/باستعمال المنحني C_f حدد إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

التمرين(14) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بـــ: $f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^2-2x-3}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي

3/ ارسم المنحني C_f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين(15) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بـــ:

$$f(x)=\frac{x^2-8x+16}{x-3}$$

نسمـــــي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c حيث من أجل كل x من D_f :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$$

3/ استنتج أن المنحني C_f الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له ثم حدّد وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى Δ.

4/ أوجد إحداثيي النقطة ω تقاطع المستقيمين المقاربين واثبت أنها مركز تناظر للمنحني C_f

5/ ارسم المنحني C_f.

6/ استنتج رسم المنحني C' الممثل للدالة h المعرفة بـــ: $h(x)=\frac{(x-4)^2}{|x-3|}$

التمرين(16) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بـــ:

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$$

نسمـــــي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ أوجد ثلاثة أعداد حقيقية α ، β و γ بحيث يكون من أجل كل x من D_f :

$$f(x)=\alpha x+\frac{\beta}{x+1}+\frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

3/ بيّن أن المنحني C_f يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له

4/ ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

5/ احسب إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني C_f مع حامل محور الفواصل

6/ بيّن أن المنحني C_f يقبل مماسا Δ معامل توجيهه 1. اكتب معادلة لـــ Δ

7/ أنشئ المماس Δ و المنحني C_f

8/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=x+m$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين(17) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفــــة بـــ:

$$f(x)=\frac{4(x-1)}{(x-2)^2}$$

نسمـــــــــي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) 1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني C_f عند نقطة تقاطعه مع حامل محور الفواصل.

3/ بيّن أن المماس (Δ) يقطع المنحني C_f في نقطة B يطلب تعيين إحداثيتها.

4/ احسب : $f(-2)$ ، $f(-1)$ ، $f(3)$ و $f(4)$ ثم ارسم بدقة المماس (Δ) ثم المنحني C_f.

ب) m وسيط حقيقي ، (Δ_m) مستقيم معادلته : $y=4x+m$

− ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد النقط المشتركة بين المنحني C_f و (Δ_m)

التمرين(18) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفــــة بـــ:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$$

1/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث المنحني (γ) تمثيلها البياني يشمل النقطة $D(0;-3)$
وتكون النقطة $E(-1;-2)$ ذروة للمنحني (γ) .

2/ بيّن أن الدالة المعرفة في السؤال 1) هي الدالة : $x\to\frac{x^2+3}{x-1}$

−ادرس تغيرات الدالة f واكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (γ)

3/ بيّن أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين ω مركز تناظر للمنحني (γ)

4/ ارسم المنحني (γ) في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

5/ لتكن الدالة h المعرفة بــــ: $h(x)=\frac{x^2+3}{|x-1|}$ (γ') تمثيلها البياني

بيّن أن المنحني (γ') يستنتج بسهولة من رسم (γ) ثم ارسم (γ')

التمرين(19) I) P(x) كثير حدود حيث : $P(x)=-x^3+6x^2-13x+8$

1/ احسب $P(1)$ واستنتج تحليلا لكثير الحدود $P(x)$

2/ ادرس إشارة $P(x)$ حسب قيم x

II) f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة بــــ: $f(x)=-x+1+\frac{x-1}{(x-2)^2}$

1− عيّن مجموعة التعريف D_f للدالة f

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

2− بيّن أنه مهما يكن العدد الحقيقي x من D_f فإن : $f'(x)=\frac{P(x)}{(x-2)^3}$

3− ادرس تغيرات الدالة f

4− بيّن أن المنحني C_f الممثل للدالة f يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

5− ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

6− اكتب معادلة المماس (T) للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 3.

7− ارسم المستقيمين (T) و (Δ) والمنحني C_f

التمرين(20) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ:

$$f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2-2x}$$

نسمـــــــي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين D أكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f

2) ادرس تغيرات الدالة f واكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني C_f

3) عين إحداثيات نقطتي تقاطع المنحني C_f مع حامل محور الفواصل

4) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 3.

5) أثبت أن المستقيم (Δ)الذي معادلته $x=1$ محور تناظر للمنحني C_f.

6) ارسم المماس (T) و (Δ) و المنحني C_f

7) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}-\{0;2\}$ بالعبارة : $g(x)=\left|\frac{x^2-2x-3}{x^2-2x}\right|$

− بين انه يمكن استنتاج المنحني (C_g) الممثل للدالة g انطلاقا من C_f .

التمرين(21) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{x^3+3x^2+6x+3}{(x+1)^2}$

1/ عيّن D_f اكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f

2/ عيّن الأعداد الحقيقية a,b,c,d بحيث من اجل كل x من D_f يكون :

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x+1)^2}$$

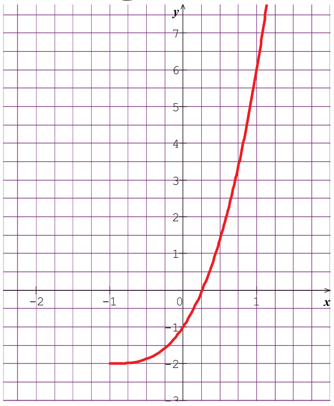
3/ ادرس تغيرات الدالة f . ماذا تستنتج بخصوص النقطة ذات الفاصلة 0.

4/ بيّن أن المنحني (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته الديكارتية وتحديد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى (Δ) .

4/ ارسم (Δ) و (C) في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (22) : المنحني (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يأتي : $g(x)=x^3+3x^2+3x-1$



1- أ) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g

وحدّد $g(0)$ و إشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

ب) علل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ يحقق : $g(\alpha)=0$

ج) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

2- f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بما يأتي:

$f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$

ب) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

ج) احسب : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]$ وفسّر النتيجة بيانيا.

د) شكّل جدول تغيرات الدالة f.

3- نأخذ $\alpha\simeq 0.26$. أ) عيّن مدور $f(\alpha)$ إلى 10^{-2}. ب) ارسم المنحني (Γ).

التمرين (23) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بـــ: $f(x)=\dfrac{4x^2-11x+7}{2(x-2)}$

وليكن $\mathcal{C}$ منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f وادرس الفروع اللانهائية للمنحني

2/ برهن أن النقطة A تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر للمنحني

3/ احسب إحداثيات نقط تقاطع المنحني مع المحورين الإحداثيين ثم ارسم المنحني $\mathcal{C}$

4/ برهن انه يوجد مماسان للمنحني معامل توجيه كل منهما

5/ احسب إحداثيات نقطتي التماس B و C لهذين المماسين مع المنحني ثم تحقق من أن النقطتين B و C متناظرتين بالنسبة إلى النقطة A .

6/ نعتبر الدالة العددية (f_m) للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$f_m(x)=\frac{4x^2+(m-8)x-m+4}{2(x-2)}$$

نسمـــــي (C_m) المنحني الممثل للدالة (f_m) في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

أ – بين انه توجد نقطة ثابتة تنتمي إلى جميع المنحنيات (C_m)

ب – ما هو المنحني (C_m) الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيين $\left(\frac{7}{4};0\right)$

الهدية

النجاح هو ما تصنعه (فكر بالنجاح – أحب النجاح..)

النجاح شعور والناجح يبدأ رحلته بحب النجاح والتفكير بالنجاح ..فكر وأحب وابدأ رحلتك نحو هدفك .. تذكر : " يبدأ النجاح من الحالة النفسية للفرد ، فعليك أن تؤمن بأنك ستنجح – بإذن الله – من أجل أن يكتب لك فعلا النجاح ." الناجحون لا ينجحون وهم جالسون لاهون ينتظرون النجاح ولا يعتقدون أنه فرصة حظ **وإنما يصنعونه بالعمل والجد والتفكير** والحب واستغلال الفرص **والاعتماد على ما ينجزونه بأيديهم .**

في أهمية اللغات

بقـــــــدر لغات المرء يكثر نفعه فتلك له عند الملمّات أعوان

فأقبل على درس اللغات وحفظها فكل لسان في الحقيقة إنسان! .

قال زيد : أمرني رسول الله ــ صلى الله عليه وسلم ــ فتعلمتُ له كتاب يهود بالسريانية وقال: إني والله ما آمن يهود على كتابي، فما مر لي نصف شهر حتى تعلمته وحذقته، فكنت أكتب له إليهم، واقرأ له كتبهم. (رواه البخاري، وأبو داود والترمذي)

حكم بالانجليزية

1/ Proverbs are the adornment of speech
2/A friend in need is friend indeed.
3/ A tree is known by its fruit
4/ Brids of feather flock together
5/ Action speak louder than words

Des proverbes algeriens

1/ Un métier à la main vaut mieux que toute fortune dont on tient
2/ Etre pauvre et fier est mieux qu'être riche et avoir le nez sous la terre
3/ Celui qui est chanceux , même les montagnes s'abaissent devant lui
4/ Celui qui n'a pas de cœur recevra des condoléances.
5/ les pieds marchent vers ce que désire le cœur .
6/ Quand il était vivant , il désirait ardemment une datte , et quand il mourut , il on accrocher toute une tonne au dessus de lui

سلسلة استعد للبكالوريا رقم (04)

المستوى : ثالثة ثانوي — السنة الدراسية :2008/2007

الشعبـــــة :علوم تجريبية + رياضيات و تقني رياضي

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

المحور : الاشتقاقية + التدريب على دراسة دوال و التوظيف

التمرين (01) : ادرس قابلية اشتقاق الدوال التالية عند القيمة x_0 مفسرا بيانيا في كل مرة النتيجة .

/1 $x_0=1$ $f(x)=(x^2-2x+3)^2$ — /4 $x_0=1$ $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}$

/2 $x_0=2$ $f(x)=\sqrt{x-2}$ — /5 $x_0=-2$ $f(x)=3x+|x^2-4|$

/3 $x_0=1$ $f(x)=2x|x-1|$ — /6 $x_0\in\mathbb{R}$ $f(x)=\sin x$

التمرين (02) احسب الدالة المشتقة لكل من الدوال التالـــــية مبيّنا المجمــــــوعة التي تجري الحسابات عليها .

/1 $f(x)=x^3(x^2+1)^4$ — /2 $f(x)=\frac{x^4(x-1)^2}{(x^2+1)^3}$ — /3 $f(x)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n$

/3 $f(x)=\cos^3(x^2+1)+\sin(x^2+1)$ — /4 $f(t)=\tan^3 t$ — /5 $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}$

التمرين (03) باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية :

/1 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ، /2 $\lim_{x\to 3}\frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$ ، /3 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$ ، /4 $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{2\cos x-1}$

/5 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$ ، /6 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}$ ، /7 $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$

التمرين (04) n عدد طبيعي غير معدوم ، و x عدد حقيقي يختلف عن1.

1) بسط المجموع $1+x+x^2+...+x^n$.

2) استنتج تبسيطا للعبارة : $1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$

التمرين (05) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{2x+5}{x-1}$

/1 عيّن f' ، f'' ، $f^{(3)}$ و $f^{(4)}$ الدوال المشتقة المتتابعة للدالة f

/2 أعط تخمينا ، حسب قيم العدد n لعبارة $f^{(n)}(x)$

التمرين (06) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=x\cos x$.

1) من أجل كل عدد حقيقي x ، أحسب $f'(x)$ ، $f''(x)$ و $f^{(3)}(x)$.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، ومن أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f^{(n)}(x)=x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+n\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

التمرين (07) لدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـــ : $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$

1) جد عددين حقيقيين a و b بحيث : $f(x)=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$.

2) n عدد طبيعي غير معدوم . باستعمال النتيجة السابقة ، أعط عبارة لـِ : $f^{(n)}(x)$.

التمرين (08) كرة حديدية نصف قطرها $8cm$ تتمدد عند ارتفاع دراجة الحرارة.

1. ما هو تغير حجمها لما يرتفع نصف قطرها بـِ $1mm$ ؟
2. ما هو تغير مساحتها في نفس الظروف ؟

التمرين (09) 1/برّر التقريب التآلفي المحلي عند 0 في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $(1+x)^3\approx 1+3x$. ب) $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{2}$. ج) $\dfrac{1}{1+x}\approx 1-x$. د) $\sin x\approx x$.

2/ باختيار دالة مناسبة وباستعمال التقريب التآلفي احسب : أ) $\tan 46°$ ، ب) $\sqrt{3654}$

التمرين (10) لتكن f دالة تحقق: $f(0)=1$ و $f'(x)=\sqrt{x}$.

1. باستعمال طريقة أولر و باختيار خطوة $h=0,5$ شكل جدولا يتضمن القيم التقريبية لـِ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[0;5]$ ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدالة f . تدور النتائج إلى $0,01$. عين قيمة مقربة للعدد $f(4)$.
2. باختيار خطوة جديدة $h=0,1$ عين قيمة مقربة للعدد $f(4)$.
3. نبرهن أن $f(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+1$. تحقق أن $f(0)=1$ و $f'(x)=\sqrt{x}$. أحسب $f(4)$ ثم قارن النتيجة مع القيم المقربة المحصل عليها سابقا بالخطوتين $0,5$ و $0,1$.

التمرين (11) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ: $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-2}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون للمنحني C_f مستقيم مقارب معادلته : $y=x-3$ ويقبل قيمة حدية عند النقطة التي فاصلتها3.

2/ ادرس تغيرات الدالة f

3/ اثبت ان المنحني C_f يقبل مماسين (D_1) و (D_2) معامل توجيه كل منهما (-3) ، يطلب إعطاء إحداثيات نقطتي التماس M_1 و M_2 ومعادلتي المماسين (D_1) و (D_2)

4/ ارسم بدقة المماسين (D_1) و (D_2) ثم المنحني C_f

5/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحني C_f والمستقيم (Δ_m) الذي معادلته : $y=-3x+m$

التمرين (12) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f_n(x)=\left(x^2-2x\right)^n$.

1) أدرس تغيرات الدالة f_n (ميّز الحالتين n زوجي ثم فردي) .

2) نسمي C_n المنحني الممثل للدالة f_n في معلم متعامد ومتجانس .

أ ــ تحقق من أنّ المستقيم ذي المعادلة $x=1$ هو محور تناظر للمنحني C_n.

ب ــ برّر أنّ C_n يمرّ من أربع نقط إحداثياتها مستقلة عن العدد الطبيعي n .

أحسب إحداثيات هذه النقط . أرسم في نفس المعلم المنحنيين C_1 و C_7 .

التمرين (13) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ $f(x)=1+2\cos x+\cos 2x$

1/ اثبت أن الدالة f دورية ودورها 2π

2/ بيّن ان الدالة f زوجية واستنتج مجال كافي لدراسة تغيرات الدالة f

3/ ادرس تغيرات الدالة f

4/ أوجد نقط تقاطع المنحني C_f مع حامل محور الفواصل

5/ ارسم المنحني C_f على المجال $[-\pi;\pi]$ و كيف يمكن استنتاج المنحني C_f

6/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد حلول الجملة $\left\{\cos^2 x+\cos x=\frac{m}{2};-\pi\le x\le\pi\right\}$

التمرين (14) ادرس تغيرات كل دالة من الدوال التالية ثم مثلها بيانيا:

1/ $f(x)=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ ، 2/ $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$ ، 3/ $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}$ ،

4/ $f(x)=x+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ، 5/ $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ ، 6/ $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$ ،

7/ $f(x)=\frac{x^2+5x+4}{\sqrt{(x+5)^2}}$ ، 8/ $f(x)=|x+2|+\frac{1}{x+1}$ ، 9/ $f(x)=x-\sqrt{x-2}$

التمرين (15) ادرس تغيرات كل دالة من الدوال التالية ثم مثلها بيانيا:

1/ $f(x)=\sin 3x-3\sin x$ ، 2/ $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x$ ، 3/ $f(x)=\frac{\cos 2x}{\cos x}$

4/ $f(x)=\cos^2 x.\sin 2x$ ، 5/ $f(x)=2\tan x-\tan 2x$ ، 6/ $f(x)=\frac{1+\sin x}{1-\cos x}$

التدريب على حل مسائل (دراسة دوال) – الجزء الثاني

مسألة (01) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفــــة بــ:

$$f(x)=-x+\sqrt{x^2+8}$$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ أحسب $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+2x\right]$. فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها ثم ارسم المنحني C_f.

3/ نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x)=-x-\sqrt{x^2+8}$

وليكن C_g منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) بين ان C_g و C_f متناظران بالنسبة للمبدأ O

ب) ارسم C_g ثم عين معادلة لــ (Γ) حيث $(\Gamma)=(C_f)\cup(C_g)$

مسألة (02) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفــــة بــ: $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I) **1**/ ادرس تغيرات الدالة f ثم عين المستقيمات المقاربة للمنحني C_f

2/ اكتب معادلة للمماس (D) للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 0

3/ احسب $f(-x)+f(x)$ وماذا تستنتج بالنسبة للمنحني C_f

4/ ادرس الوضع النسبي للمنحني C_f والمستقيم (D). ماذا تستنتج ؟

5/ بيّن أن المنحني C_f يقطع المستقيم الذي معادلته $y=x$ في نقطة فاصلتها x_0 حيث : $1\prec x_0\prec 2$

6/ ارسم المنحني C_f .

II)/ لتكن الدالة h المعرفة بــــ: $h(x)=1+\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$ (γ) تمثيلها البياني

1/ ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند القيمة $x_0=0$

2/ بين أن الدالة h زوجية ثم استنتج رسم المنحني (C_h) انطلاقا من رسم C_f

مسألة (03) **الجزء الأول** f الدالة العددية: $f(x)=ax+\dfrac{bx+c}{(x-2)^2}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث المنحني C_f يشمل النقطة $D(3;1)$ وتكون النقطة $E(1;1)$ ذروة للمنحني C_f .

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

2/ بيّن أن الدالة المعرفة في السؤال 1) هي الدالة : $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+3x+1}{(x-2)^2}$

3/ ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني C_f

4/ عيّن عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ وبيّن أنه يوجد حل وحيد α في المجال $\left]\dfrac{5}{2};3\right[$

5/ باستعمال خوارزمية التنصيف اوجد حصرا للعدد α سعته 0.125

6/ ادرس وضعي المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

7/ بيّن ان المنحني C_f يقبل مماسا (Δ) يوازي المستقيم المقارب المائل

8/ اثبت ان المنحني C_f يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها

9/ ارسم (Δ) و C_f .

10/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

الجزء الثاني h الدالة المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} h(x)=f(x) & x\geq 3 \\ h(x)=x-3+\dfrac{1}{x-2} & x\prec 3 \end{cases}$$

1/ ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق h عند القيمة $x_0=3$ ثم فسر النتيجة بيانيا

2 / ادرس تغيرات الدالة h مستعينا بتغيرات الدالة f

3/ ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C_h) ثم ارسم المنحني (C_h)

مسألة (04) f الدالة العددية : $f(x)=|x-2|+\dfrac{1}{x-1}$

1/ ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة $x_0=2$.فسر النتيجة بيانيا

2/ ادرس تغيرات الدالة f واكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f)

3/ اثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]0;\dfrac{1}{2}\right[$

4/ ارسم المنحني (C_f)

5/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $|x-2|+\dfrac{1-m(x-1)}{x-1}=0$

6/ استنتج مما سبق عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي θ : $|\cos\theta-2|+\dfrac{1-m(\cos\theta-1)}{\cos-1}=0$

مسألة (05) **الجزء الأول** f هي الدالة المعرّفة على المجموعة $\mathcal{D}_f$ بـِ :

$$.f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$$

مع $\mathcal{D}_f=]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$ ؛ و C تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب النهايتين للدالة f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$.

2) بيّن أنّ المستقيم ذي المعادلة $y=2x+3$ ، هو مستقيم مقارب للمنحني C بجوار $(+\infty)$.

3) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ؟ عند -4 ؟ 4) أحسب $f'(x)$ من أجل $x\in\mathcal{D}_f-\{-4;0\}$.

5) أنشئ جدول التّغيّرات للدالة f .6) أرسم المستقيمات المقاربة ثمّ المنحني C .

الجزء الثاني نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x)=x+1-\sqrt{x^2+4x}$

C' تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

أ- برهن ان المنحنيين C و C' متناظران بالنسبة للنقطة $\omega(-2;-1)$

ب- نعتبر المنحني $(\Gamma)=(C)\cup(C')$. بيإن ان معادلة (Γ) هي : $y^2-2(x+1)y-2x+1=0$

جـــ- ارسم (Γ)

د- عيّن معادلة (Γ) في المعلم $(\omega;\vec{i};\vec{u})$ حيث : $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$ ثم حدد طبيعة (Γ)

مسألة (06) f الدالة العددية: $f(x)=\dfrac{x^3+x-2}{2x}$

(γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ احسب : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x^2\right]$ وماذا تستنتج ؟

3/ اكتب معادلة المماس (T) في النقطة التي فاصلتها $x_0=1$

4/ بيّن أن المماس (T) يقطع المنحني (γ) في نقطة M_0 يطلب تعيينها

5/ اثبت ان المنحني (γ) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها

6/ مستعينا بالنتائج السابقة ارسم المنحني (γ)

7/ نعتبر الدالة h حيث : $h:x\to\dfrac{-x^2|x|-|x|-2}{2x}$

أ- ادرس شفعية الدالة h . ب- استنتج رسم المنحني (C_h) انطلاقا من رسم المنحني (γ)

مسألة (07) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ: $f(x)=x-1+\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ احسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-3)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$ ثم فسر النتيجة بيانيا

3/ بيّن ان النقطة $A\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني C_f

4/ بين أن المنحني C_f يقبل مماسين T_1 و T_2 ميلهما $\frac{5}{2}$ ثم حدد معادلتيهما

5/ بيّن أن المنحني C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $\frac{1}{2}\prec\alpha\prec\frac{5}{8}$

6/ ارسم C_f ثم استنتج إشارة $f(x)$ حسب قيم x

7/ ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة : $f(x)=x+m$ حيث m وسيط حقيقي

مسألة (08) F دالة معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $F(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x

$F'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.نقبل أنّ الدالة F موجودة ولا نريد إيجاد عبارتها $F(x)$. نسمي C تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس .

F دالة معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $F(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي $F'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

نقبل أنّ الدالة F موجودة ولا نريد إيجاد عبارتها $F(x)$.

1) G الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـِ : $G(x)=F(x)+F(-x)$

أ ــ برّر أنّ G تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأحسب $G'(x)$ من أجل $x\in\mathbb{R}$.

ب ــ أحسب $G(0)$ واستنتج أن الدالة F فردية .

2) H الدلة المعرّفة على المجال $I=]0;+\infty[$ بـِ : $H(x)=F(x)+F\left(\dfrac{1}{x}\right)$

أ ــ برّر أنّ H تقبل الاشتقاق على I وأحسب $H'(x)$ من أجل $x\in I$.

ب ــ برهن أنّه من أجل كل $x\in I$ ، $H(x)=2F(1)$.

ج ــ استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=2F(1)$. ماذا ينتج عن المنحني C ؟

د ــ 3) T الدالة المعرّفة على $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ بـِ : $T(x)=F(\tan x)-x$

أ ــ أحسب $T'(x)$. ماذا ينتج عن الدالة T ؟ ب ــ أحسب $F(1)$.

4) أنجز جدول تغيّرات الدالة F على $\mathbb{R}$.

5) أرسم المنحني C ، مستقيماته المقاربة ومماساته عند النقط ذات الفواصل -1 ، 0 و 1 .

مسألة (09) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــــة بـــ: $f(x)=\dfrac{4x^2-11x+7}{2(x-2)}$

وليكن C منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f وادرس الفروع اللانهائية للمنحني

2/ برهن أن النقطة A تقاطع المستقيمين المقاربين مركز تناظر للمنحني

3/ احسب إحداثيات نقط تقاطع المنحني مع المحورين الإحداثيين ثم ارسم المنحني C

4/ برهن انه يوجد مماسان للمنحني معامل توجيه كل منهما

5/ احسب إحداثيات نقطتي التماس B و C لهذين المماسين مع المنحني ثم تحقق من أن النقطتين B و C متناظرتين بالنسبة إلى النقطة A .

6/ نعتبر الدالة العددية (f_m) للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

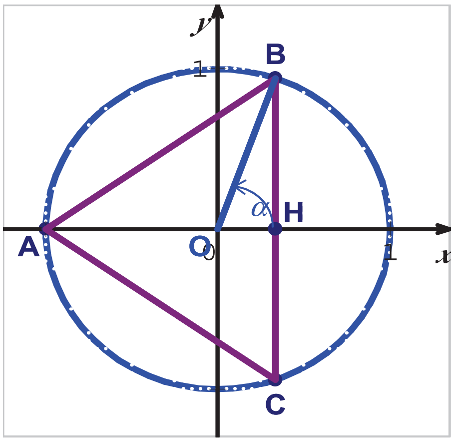
$$f_m(x)=\frac{4x^2+(m-8)x-m+4}{2(x-2)}$$

نسمـــــــي (C_m) المنحني الممثل للدالة (f_m) في المستوي المنسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ – بين انه توجد نقطة ثابتة تنتمي إلى جميع المنحنيات (C_m)

ب – ما هو المنحني (C_m) الذي يشمل النقطة ذات الإحداثيين $\left(\dfrac{7}{4};0\right)$

مسألة (10) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس مباشر $(O;\vec{i};\vec{j})$.



مثلث ABC متساوي الساقين رأسه $A(-1;0)$ ، محيط بالدائرة ذات المركز O ونصف القطر 1 .النقطة B تقع فوق المحور (Ox) ، و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

ليكن α قيسا رئيسيا موجبا مقدّرا بالراديان للزاوية $(\vec{i},\overrightarrow{OB})$

1) ــ عين إحداثيتي النقطة B .

ــ عبّر عن المسافتين BH و AH بدلالة α .

– استنتج بدلالة α مساحة المثلث ABC .

2) نعتبر الدالة f المعرّفة على $[0;\pi]$ بـــ : $f(x)=\sin x(1+\cos x)$.

أ ــ عين الدالة المشتقة للدالة f وبرهن أنّه من أجل كل $x\in[0;\pi]$

$f'(x)=2\cos^2 x+\cos x-1$.

استنتج أنّه من أجل كل $x\in[0;\pi]$ ، $f'(x)=(2\cos-1)(\cos x+1)$.

ب ــ أدرس اشارة $f'(x)$ ، ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f .

3) برهن أنّه توجد قيمة للعدد α التي من أجلها تكون مساحة المثلث ABC أكبر ما يمكن ، المطلوب تحديد هذه المساحة . ما هي إذن طبيعة المثلث ABC .

مسألة (11) نعتبر في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. النقط $A(-1;2)$ ، $B(-1;0)$ ، $C(0;2)$ و $M(x;0)$ حيث $x\prec -1$ المستقيم (AM) يقطع محور التراتيب في النقطة N .

1. احسب بدلالة x كل من ترتيب النقطة N ومساحات المثلثات OMN ، CAN ، ABM.

2. لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;-1[$ بـــ: $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ وليكن (C_f) منحنيها في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ) بتقسيم المثلث OMN بشكل مناسب عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل x من $]-\infty;-1[$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

ب) ادرس تغيرات f على المجال $]-\infty;-1[$

جــ) تحقق ان (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D_1) و (D_2) يطلب تحديدهما

د) ارسم (C_f)

هــ) ما هي قيمة x التي تكون من أجلها مساحة المثلث OMN أصغر ما يمكن ؟

و) احسب عندئذ هذه المساحة.

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التدريب على معالجة وضعيات ادماجية-الجزء الثاني

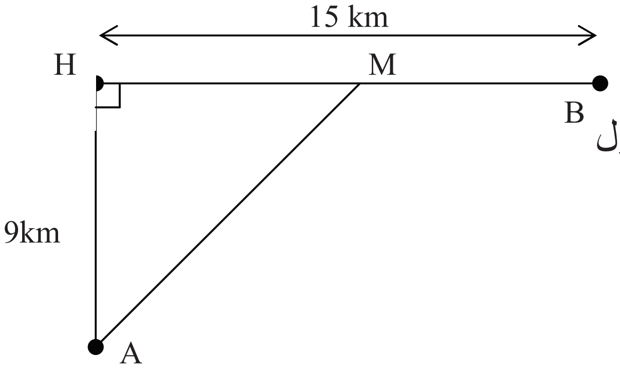
التمرين (01) : أراد فلاح إنشاء مدجنة مستطيلة الشكل مساحتها $392m^2$ أحد جدرانها حائط ضيعته كما هو مبين في الشكل

نرمز لبعد كل من الوتدين A وB عن الحائط بالرمز x و نرمز للبعد بين الوتدين A وB بالرمز y

أين يمكن وضع الوتدين A و B حتى يكون سياج المدجنة أصغر ما يمكن ؟

التمرين (02) بسبب الظلام يريد حارس المنارة الوصول إلى بيته الواقع على الساحل ، ينتقل بالقارب بسرعة : $4km.h^{-1}$ إلى ضفة النهر ، ثم ينتقل راجلا بسرعة : $5km.h^{-1}$.(الشكل)

أين يجب إرساء القارب حتى يصل الحارس إلى المنزل في أقل مدة ممكنة؟ و ما هي هذه المدة علما أن الطريق من الضفة إلى المنزل مستقيما ؟

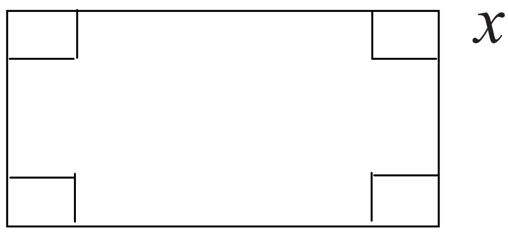


التمرين (03) يراد إنجاز خزان دون غطاء قاعدته مربعة الشكل وجوانبه مستطيلة ، سعته $4m^3$ من الماء تكلفة المربع الواحد $100D.A$

-ماهي ابعاد الخزان التي تجعل التكلفة أقل ما يمكن ؟

- احسب هذه التكلفة.

التمرين (04)



انطلاقا من مستطيل بعداه 16 و10 بالسنتيمترات نصنع علبة على شكل متوازي مستطيلات قائم بالكيفية التالية: من كل ركن من المستطيل نقطع مربعا طول ضلعه يساوي x ثم نرفع الجوانب بالطي .

حدد قيمة x ليكون حجم العلبة اكبر ما يمكن ؟

التمرين (05) من جذع شجرة دائري المقطع قطره D ، نريد الحصول على رافد مستطيل المقطع قاعدته x وارتفاعه h .

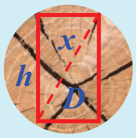
نحصل على المقاومة القصوى (العظمى) في الانحناء كلما كان المقدار xh^2 كبيرا مع $h > x$.

I) f هي الدالة المعرفة على المجال $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ بـ : $f(x) = -x^3 + \frac{9}{4}x$.

C المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث يؤخذ $\|\vec{i}\| = 2\|\vec{j}\| = 2cm$.

1. أحسب $f'(x)$ وأنجز جدول تغيرات الدالة f .

2. أكتب معادلة لِـ t_1 مماس المنحنى C عند النقطة O ثم معادلة لِـ t_2 مماس المنحنى C عند نقطته A ذات الفاصلة $\frac{3}{2}$ ؛ ثم أدرس على المجال $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ الوضعية النسبية للمنحنى C بالنسبة لِـ t_1 وبالنسبة لِـ t_2 .



3. أنشئ المماسين t_1 و t_2 ثم المنحنى C .

II) تطبيق : نضع $D = 1,5m$. (D هو قطر المقطع الدائري لجذع الشجرة)

1. اشرح لماذا $x^2 + h^2 = \frac{9}{4}$.

2. أحسب xh^2 بدلالة x .

3. استعمل الجزء I) لإيجاد x و h بحيث تكون للرافد أقصى مقاومة للانحناء

التمرين (06)

نريد صنع علبة مصبرات اسطوانية الشكل (بغطاء)
ذات حجم V معطى
اوجد النسبة بين الإرتفاع h ونصف القطر r حتى نستعمل اقل مايمكن من المعدن
(علبة اقتصادية الصنع)

problème de la boite de conserve

الهدية

المفاتيح العشرة للنجاح الدراسي

4- النجاح هو ما تصنعه (فكر بالنجاح - أحب النجاح..)

النجاح شعور والناجح يبدأ رحلته بحب النجاح والتفكير بالنجاح ..فكر وأحب وابدأ رحلتك نحو هدفك .. تذكر : " يبدأ النجاح من الحالة النفسية للفرد ، فعليك أن تؤمن بأنك ستنجح – بإذن الله – من أجل أن يكتب لك فعلا النجاح ." الناجحون لا ينجحون وهم جالسون لاهون ينتظرون النجاح ولا يعتقدون أنه فرصة حظ **وإنما يصنعونه بالعمل والجد والتفكير** والحب واستغلال الفرص **والاعتماد على ما ينجزونه بأيديهم** .

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

سلسلة استعد للبكالوريا رقم (03)

المستوى : ثالثة ثانوي — السنة الدراسية :2009/2008

الشعبة :علوم تجريبية + رياضيات

و تقني رياضي

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

• المحور : الدوال الأسية و المعادلات التفاضلية •

الدالة الأسية النيبيرية

التمرين (01) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $e^{2x}=1$ ، 2) $e^{-5x}=\frac{1}{e}$ ، 3) $e^{x+3}=e^{\frac{4}{x}}$

4) $e^{2x+1}-(e^x)^3=0$. ، 5/ $e^x+2e^{-x}-3=0$ ، 6/ $e^x+3e^{-x}-4=0$

7) $6e^{-3x}+e^{-x}-13e^{-2x}+2=0$ ، $e^{3x}+3e^{2x}-e^x-3=0$

التمرين (02) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $e^{3x}\leq 1$ ، 2) $e^{2x^2}\leq e^{5x+3}$ ، 3) $e^{x+1}>e^{-\frac{2}{x}}$ ، 4) $e^{x^2}>\left(e^3\right)^4 e^{-x}$

5) $\left(e^x+3\right)\left(2-e^x\right)\geq 0$ ، 6) $2e^{2x}-5e^x+2\prec 0$

التمرين (03) عيّن مجموعة تعريف كل دالة من الدوال التالية :

1/ $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ ، 2/ $f(x)=e^x(x^2+x-3)$ ، 3/ $f(x)=\sqrt{e^x-1}$

4/ $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ ، 5/ $f(x)=\frac{e^x+1}{e^{2x}-e^x}$ ، 6/ $f(x)=\frac{1}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$

التمرين (04) تحقق من صحة المساواة المعطاة من اجل كل x في كل حالة من الحالات التالية:

1/ $\frac{e^x}{2+e^x}=\frac{1}{2e^{-x}+1}$ ، 2/ $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ ،

3/ $\left(e^x+e^{-x}\right)^2=\frac{e^{4x}+1}{e^{2x}}+2$ ، 4/ $\frac{e^x}{e^x-x}=\frac{1}{1-xe^{-x}}$

التمرين (05) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

1.بين أن الدالة f فردية.

2.بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(2x)=\dfrac{2f(x)}{1+\left[f(x)\right]^2}$

التمرين (06) احسب النهايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x)$ ، 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{2x}-e^x+1)$ ، 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$ ، 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ ، 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ ، 7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)e^{-x}$ ، 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x)e^{-x+1}$ ، 10) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x)e^{-x+1}$ ، 11) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x-1}-x}{x-1}$

التمرين (07) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بــ:

$$f(x)=\frac{2e^x}{e^x-1}$$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f واثبت ان المنحني C_f يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة.

2/ بيّن ان النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحني C_f وارسم المنحني C_f .

3/ لتكن الدالة h المعرفة بـــــ: $h(x)=\dfrac{2e^x}{\left|e^x-1\right|}$ (γ') تمثيلها البياني

أ) اكتب $h(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

ب)باستخدام المنحني C_f ، ارسم المنحني (γ').

جــ) ناقش بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلـــــول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $(m-3)\left|e^x-1\right|=2e^x$

التمرين (08) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بــ:

$$f(x)=e^{2x}-2e^x$$

1) ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني C_f الممثل للدالة f

2) عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني C_f مع المحورين الإحداثيين.

3) اثبت أن المنحني C_f يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها

4) ارسم المنحني C_f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (09) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2e^{-x}$

1)ادرس تغيرات الدالة f

2)ادرس الفروع اللانهائية للمنحني C_f الممثل للدالة f

3)ارسم المنحني C_f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

4) استنتج رسم المنحني (Γ) الممثل للدالة h حيث : $h(x)=x^2e^{-|x|}$

التمرين (10) نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=e^{-x}+\dfrac{1-x}{1+x}$

1) ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني C_f الممثل للدالة f

2) ارسم المنحني C_f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

التمرين (11) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بـــ:

$$f(x)=x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}$$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب النهايتين عند $-\infty$ و $+\infty$

2) احسب $f(-x)+f(x)$ من اجل كل قيم x من $\mathbb{R}$ وماذا تستنتج بالنسبة للنقطة $A(0;1+\ln 4)$

3) ادرس تغيرات الدالة f

4) تحقق انه من اجل كل قيم x من $\mathbb{R}$ فإن المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلا وحيدا.

5) بيّن انه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=x+2+\ln 4-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

6)بيّن أن المنحني C_f يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب تعيينهما ثم ارسم المنحني C_f .

التمرين (12) نعتبر الدالة f المعرفة بـــ: $f(x)=\dfrac{3e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عيّن العددين الحقيقيين α و β بحيث من اجل كل عدد حقيقي x غير معدوم

$$f(x)=\alpha+\frac{\beta e^{2x}}{e^{2x}-1}$$

2) ادرس تغيرات الدالة f

3) بيّن أن النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحني C_f ثم ارسم المنحني C_f

4) بيّن ان المنحني C_f يقبل مماسين ميل كل منهما -6 عند نقطتين من C_f يطلب تعيين هاتين النقطتين.

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

التمرين (13) ادرس تغيرات كل دالة من الدوال التالية و الفروع اللانهائية للمنحني الممثل لها ثم ارسم تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$ **2/** $f(x)=x+\dfrac{2}{e^x+1}$ **3/** $f(x)=(x+1)e^x$

4/ $f(x)=3-x-\dfrac{1}{e^x-2}$ **5/** $f(x)=2e^{2x}-4e^x$ **6/** $f(x)=(1+x)e^{-x}$

7/ $f(x)=(x^2-5x+7)e^x$ **8/** $f(x)=4xe^{-2x}$ **9/** $f(x)=(2x^2-3x)e^{-x+1}$

10/ $f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^x+4}{e^x-1}$ **11/** $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$ **12/** $f(x)=(1-x)e^{1-x}$

التمرين (14) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بــ: $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) ادرس تغيرات الدالة f.

2) بين أن النقطة $A\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C).

3) عين معادلة المماس T للمنحني (C) عند النقطة A.

4) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}-f(x)$

أ) بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=\dfrac{(e^x-1)^2}{4(1+e^x)^2}$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g . ج) استنتج إشارة g على $\mathbb{R}$.

د) استنتج الوضعية النسبية للمنحني (C) و المستقيم T

5) ارسم T و (C).

التمرين (15) f دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$ بــ:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}.e^{-\frac{1}{x}} & x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) بيّن ان المستقيم (D): $y=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C)

2) ادرس قابلية اشتقاق f عند 0

3) ادرس تغيرات f

4) ارسم المنحني (C)

إعداد الأستاذ:
حليلات عماد

التمرين (16) 1/ بيّن أن الدالة : $x \to e^{x}$ هي مجموع دالة زوجية و دالة فردية

2/ نضع : $ch(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ **(دالة تجب الزائدية)** ، (C) المنحني الممثل لها

$sh(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ **(دالة الجيب الزائدية)** ، (C') المنحني الممثل لها

أ- ادرس شفعية ch و sh

ب- ادرس تغيرات كلا من ch و sh.

ج- ارسم في نفس المعلم المنحيين (C) و (C')

3/ بيّن أنه من أجل كل عددين حقيقين a و b يكون :

$ch^{2}(a)-sh^{2}(a)=1$ $\quad$ $ch(a+b)=ch(a).ch(b)+sh(a).sh(b)$

$sh(a+b)=sh(a).ch(a)+sh(b).ch(b)$

4/ استنتج : $ch(2a)$ و $sh(2a)$

التمرين (17) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\left(ax^{2}+bx+c\right)e^{-x}$

حيث : $a\,,b\,,c$ أعداد حقيقية . (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1/ أحسب الدالة المشتقة للدالة f بدلالة $a\,,b\,,c$

2/ عين الأعداد الحقيقية $a\,,b\,,c$ إذا علمت أن (C_f) يشمل النقطة $A\,(0\,,1)$ ويقبل مماسا يوازي محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة 1 و $f'(0)=-6$

3/ فيما يلي نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=\left(x^{2}-5x+1\right)e^{-x}$

أ) احسب $f(0)$

ب) ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها

ج) ارسم المنحني (C_f)

التمرين (18) : لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية . (C) هو التمثيل البياني للدالة في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) عين a ، b و c بحيث المنحني (C) يشمل النقطة O و الدالة المشتقة f' تنعدم من أجل $x=\ln\dfrac{3}{4}$ و المستقيم الذي معادلته $y=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C).

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=2e^{2x}-3e^{x}+1$

أ)ادرس اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها.

ب)حدد نقط تقاطع المنحني (C) مع حامل محور الفواصل.

ج) عين معادلة المماس للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها0.

د) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C). هـــ) ارسم (C).

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

المعادلات التفاضلية

التمرين (19) : عيّن الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

أ) $y' = 2y$ ، ب) $2y' - y = 0$ ، ج) $y' + 3y = 2$ ، د) $3y' - 2y + 1 = 0$

التمرين (20) : عيّن الحل f للمعادلات التفاضلية المقترحة والمرفقة بشرط ابتدائي :

أ) $2y' + y = 0$ و $f(\ln 4) = 1$ ، ب) $y' - 3y = 0$ و $f(0) = 1$

ج) $2y' + y = 1$ و $f(-1) = 2$

في الحالة الأخيرة ج) . ادرس تغيرات الدالة f ثم ارسم في معلم متعامد ومتجانس تمثيلها البياني .

التمرين (21): نعتبر الدالة m المعرفة على $]0 ; +\infty[$ التي ترفق بالعدد t ، العدد $m(t)$ حيث $m(t)$ هي كتلة الملح بالغرام المحتواة في محلول ملحي (ماء +ملح) عند اللحظة t بالدقائق نقبل أن الدالة m هي حل للمعادلة التفاضلية : $(E) : 5y' + y = 0$ و أن الشرط الابتدائي هو : $m(0) = 300$

1. حل المعادلة (E)
2. عيّن العدد t_0 بحيث يكون : $m(t_0) = 150$
3. نقبل انه لا يمكن الكشف عن وجود الملح خلال اللحظة t إلا إذا كان $m(t) \leq 10^{-2}$
   - ابتداء من أية لحظة يكون ممكنا الكشف عن وجود الملح ؟

التمرين (22): نعتبر المعادلة التفاضلية (1) : $y' - 2y = 2x + 1$

1. أوجد دالة f تآلفية تكون حلا للمعادلة التفاضلية (1).
2. بوضع : $y = z + f$ ، بيّن أنه إذا كان y حل للمعادلة التفاضلية (1) فإن z حل للمعادلة التفاضلية : $z' - 2z = 0 ...(2)$
3. حل عندئذ المعادلة التفاضلية (2) ثم أستنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (1)

التمرين (23): نعتبر المعادلة التفاضلية (1) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$

1. بوضع : $y = z - 3e^{-3x}$ ، أوجد المعادلة التفاضلية (2) التي تحققها الدالة z
2. حل المعادلة التفاضلية (2) ثم أستنتج حل المعادلة التفاضلية (1)
3. عيّن الحل f للمعادلة (1) بحيث : $f(0) = \frac{3}{2}$
4. تحقق أن الدالة f تكتب على الشكل : $f(x) = 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right)$
5. ادرس تغيرات الدالة f
6. عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات.
7. احسب $f(1)$ ثم ارسم المنحني (C_f)

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

مسألة (01) I) نعتبر f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي

$f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$ حيث : a و b عددان حقيقيان

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1\,cm$.

عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي :

$g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$ ، (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق

أ) بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسّر هذه النتيجة بيانيا .(نذكر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$)

ب) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .

ج) بيّن ان المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين احداثييها .

د) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_g) عند النقطة I . هـ) ارسم (C_g) .

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي : $k(x)=g(x^2)$

– باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عيّن اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

مسألة (02) I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x-1+\dfrac{4}{e^{x}+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2 – أ) بيّن أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω و أكتب معادلة لمماس (C_f) عند النقطة ω

ب) أثبت أن ω مركز تناظر للمنحنى (C_f).

3 – أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]$.

ب) استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما

4- أ) بيّن أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2,77;-2,76[$

ب) احسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدّور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ارسم (C_f) ومستقيميه المقاربين.

II) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=-x+3-\dfrac{4}{e^{x}+1}$. (C_g)منحني الدالة g

1-بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x)=f(-x)$

– استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول (C_f) إلى (C_g)

2- أنشئ في نفس المعلم السابق (C_g) (دون دراسة g)

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

مسألة (03) I - g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بـــ:

$$g(x)=-1-xe^{x}$$

1) ادرس تغيرات الدالة g . 2) استنتج إشارة $g(x)$

II - f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x)=-x+(1-x)e^{x}$

وليكن (γ) منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

3) ادرس تغيرات الدالة f و طبيعة الفروع اللانهائية للمنحني (γ)

4) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (γ) عند النقطة التي فاصلتها 0

5) اثبت أن للمنحني (γ) نقطة انعطاف يطلب إيجاد إحداثييها.

6) بيّن انه يوجد عدد حقيقي x_0 ينتمي إلى المجال $\left]\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right[$ حيث : $f(x_0)=0$

7) ارسم (Δ) و (γ).

مسألة (04) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــالعبارة:

$$f(x)=-x+1+e^{2x}-e^{x}$$

(C)هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C) وبيّن انه يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب إعطاء معادلته.

3) ادرس الوضعية النسبية للمنحني (C) و (Δ) .

4) أ- x_0 عدد حقيقي ، نعتبر (T) المماس للمنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة x_0.

عيّن x_0 حتى يكون (T) موازيا لـــ (Δ) ، اكتب عندئذ معادلة لــ (T).

ب- بيّن ان المنحني (C) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها.

ج- ارسم (T) و (C) في نفس المعلم .

5) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم الذي معادلته (T_m) الذي معادلته : $y=-x+m$

مسألة (05) ليكن $C(t)$ التركيز بـــ (mg/ℓ) لدواء في الدم بدلالة الزمن $(t \succ 0)$ حيث t معبرا عنه بالساعات .سرعة تخلص الجسم من هذا الدواء متناسبة مع كمية الدواء الباقية في الدم في تلك اللحظة ، ثابت التخلص يساوي 0.25 ، التركيز الابتدائي هو $5mg/\ell$.

1) برر المساواة : $C'(t)=-025C(t)$ ثم اوجد عبارة $C(t)$

2) ادرس تغيرات C ثم ارسم بيان الدالة C

3) أعط حصرا بتقريب 0.01 للحظة t_0 التي ابتداء منها يكون $C(t)\prec 2$

مسألة (06) I) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ $g(x)=x+1+e^{x}$

1 .ادرس تغيرات الدالة g.

2. اثبت أن المنحني الممثل لها (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب إعطاء معادلته.

3.بيّن أن للمعادلة : $g(x)=0$ حلا وحيدا α في المجال $]-1.3;-1.2[$

4.استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

5. أنشئ في معلم متعامد التمثيل البياني للدالة g.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=\dfrac{xe^{x}}{e^{x}+1}$

(γ) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) بيّن ان : $f'(x)=\dfrac{e^{x}.g(x)}{(e^{x}+1)^{2}}$ ثم استنتج تغيرات f

2) بيّن أن : $f(\alpha)=\alpha+1$ ثم استنتج حصرا لـــــــ : $f(\alpha)$

3) عيّن معادلة المماس (D) للمنحني (γ) عند النقطة ذات الفاصلة 0. ثم ادرس وضعية المنحني (γ) بالنسبة للمستقيم (D).

4) بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y=x$ مقارب مائل للمنحني (γ) في جوار $+\infty$

5) ادرس وضعية المنحني (γ) بالنسبة للمستقيم (Δ).

ارسم (Δ) و (D) و (γ)

مسألة (07) I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=e^{-x}+x-1$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) احسب $g(0)$ ثم استنتج أن : $e^{-x}+x\geq 1$ لكل $x\in\mathbb{R}$

II) لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1)عيّن مجموعة تعريف الدالة f

1) بيّن أن : $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^{x}}}$ لكل $x\in\mathbb{R}^{*}$.

2) بيّن ان : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ ثم فسّر هندسيا النتيجة.

3) ادرس تغيرات الدالة f

4) أ) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) في النقطة O .

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المماس (Δ).

جـــ) أنشئ (Δ) و (C_f) .

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

مسألة (08) لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{x}+1}$$

و (C) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ – تحقق من أن : $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^{x}+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب – استنتج أن f فردية

2) احسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3) أ– بين أن : $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب– أعط جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^{+}$

ج – استنتج ان : $1-\frac{2}{e^{x}+1}\leq\frac{1}{2}x$ لكل x من $\mathbb{R}$.

4) بيّن ان : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right]=0$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

5) أنشئ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ المستقيم الذي معادلته : $y=1-\frac{1}{2}x$ ثم أنشئ المنحني (C)

مسألة (09) I) لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$g(x)=1-xe^{1-x}$$

1) ادرس تغيرات الدالة g.

2) استنتج إشارة $g(x)$

II) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x)=x+(x+1)e^{1-x}$

(C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

2) ادرس تغيرات الدالة f

3) أ) بيّن أن : $\lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{1-x}=0$

ب) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C_f)

4) بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (Δ) معامل توجيهه 1.اكتب معادلة هذا المماس.

5) اثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]-1;\frac{-1}{2}\right[$.

6) ارسم المماس (Δ) و المنحني (C_f) .

7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $(x+1)e^{1-x}=m$

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

مسألة (10) الجزء الأول : تحديد حل المعادلة التفاضلية : $g' - 2g = xe^x$ ....(1)

1- حل المعادلة التفاضلية :

$y' - 2y = 0$.....(2) حيث y دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

2- ليكن a و b عددين حقيقيين و μ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$:

$$\mu(x) = (ax + b)e^x$$

أ) حدد a و b حتى يكون μ حلا للمعادلة (1)

ب) برهن أن الدالة v تكون حلا للمعادلة (2) إذا وفقط إذا كان $\mu + v$ حلا للمعادلة (1)

ج) استنتج مجموعة حلول المعادلة (1).

د) حدد الحل للمعادلة (1) والذي ينعدم عند القيمة 0.

الجزء الثاني : دراسة دالة مساعدة:

لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2e^x - x - 2$

1) ادرس تغيرات الدالة g

2) حدد عدد حلول المعادلة : $g(x) = 0$. نسمي α الحل غير المعدوم تحقق أن :

$$-1.6 \prec \alpha \prec -1.5$$

3) حدد إشارة $g(x)$ تبعا لقيم x

الجزء الثالث: دراسة الدالة f : $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$

1) حدد نهاية f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

2) ادرس تغيرات الدالة f

3) بيّن أن : $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4) ارسم المنحني البياني (γ) للدالة f في مستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (خذ الوحدة : $2cm$)

مسألة (11) الجزء الأول لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x}$$

(C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) ادرس تغيرات f وشكل جدول تغيراتها.

3) بيّن أن المعادلة $f(x) = 10$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$. أعط قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد α .

5) ارسم المنحني (C_f).

الجزء الثاني : نضع $y(t)$ قيمة درجة حرارة تفاعل كيميائي ، مقدرة بالدرجات سيلسيوس، عند اللحظة t ، مقدرة بالساعات. القيمة الابتدائية عند اللحظة $t=0$ هي 10 $y(0)=10$.

نقبل بأن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي t من المجال $]0;+\infty[$ العدد $y(t)$ هي حل للمعادلة التفاضلية : $y'+\frac{1}{2}y=20e^{-\frac{1}{2}t}$ ....(1)

1) تحقق من ان الدالة f المدروسة في الجزء الأول حل للمعادلة التفاضلية (1) على المجال $[0;+\infty[$

2) نقترح فيما يلي : البرهان أن الدالة f هي الحل الوحيد للمعادلة التفاضلية (1) على المجال $[0;+\infty[$ التي تأخذ القيمة 10 عند اللحظة 0.

أ) ليكن g حلا كيفيا للمعادلة التفاضلية (1) على المجال $]0;+\infty[$ بحيث : $g(0)=10$.

بيّن أن الدالة $g-f$ حل للمعادلة التفاضلية: $y'+\frac{1}{2}y=0$........(2)

ب) حل المعادلة التفاضلية (2).

جـ) ماذا تستنتج ؟

3) ما هو الوقت اللازم حتى تنزل درجة الحرارة إلى قيمتها الابتدائية ؟ تدور النتيجة إلى الدقيقة.

مسألة (12) **الجزء الأول:** نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ : $f(x)=e^{x}-3x-1$

(C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- ادرس تغيرات الدالة f .

2- بيّن أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين : $M(\alpha;0)$ و $O(0;0)$ حيث: $\alpha\in\left]\frac{5}{4};2\right[$

3- أثبت أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) وحدد وضعيته بالنسبة للمنحني (C_f).

4- بيّن أن (C_f) لا يقبل مقارب مائل بجوار $+\infty$ ، حدد طبيعة هذا الفرع اللانهائي ،ارسم (C_f)

الجزء الثاني: نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ : $g(x)=e^{x}-\frac{3}{2}x^{2}-x+1$

(C_g) هو المنحني الممثل للدالة g في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- تأكد من أنه لكل $x\in\mathbb{R}$: $g'(x)=f(x)$

2- استنتج تغيرات الدالة g

3- باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة . برهن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]-\frac{3}{2};-1\right[$. 4- ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (C_g)

4- بيّن ان المنحني (C_g) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين احداثييها. أرسم (C_g)

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

مسألة (13) الجزء الأول : لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$$f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-1}$$

ليكن (C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- ادرس تغيرات الدالة f و اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f)

2- عيّن إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع المحورين الإحداثيين .

3- ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي وحدد نقطة تقاطعهما A.

4- اكتب معادلة المماس للمنحني (C_f) عند النقطة A

5- ارسم المماس والمنحني (C_f)

الجزء الثاني : نعتبر الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x)=\dfrac{(e^x-2)^2}{(e^x-1)(e^x+1)}$

(C_g) هو المنحني الممثل للدالة g في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- عيّن مجموعة تعريف الدالة g

2- بيّن أن : $g'(x)=e^x.f'(e^x)$

3- استنتج تغيرات الدالة g.

4- بيّن أن النقطة $\omega\left(0;-\dfrac{3}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C_g).

5- ارسم المنحني (C_g)

6- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $(1-m)e^{2x}-4e^x+4+m=0$

مسألة (14) I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــالعبارة : $f(x)=x+\dfrac{e^x}{e^x+1}$

ليكن (C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2/ برهن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D_1) في جوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلته .

3/ أثبت ان المستقيم (D_2) الذي معادلته : $y=x+1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) في جوار $+\infty$

4/ برهن ان المنحني (C_f) يقع في شريط حداه المستقيمان (D_1) و (D_2)

5/ برهن ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث : $-1\prec\alpha\prec 0$

6/ لتكن النقطة ω تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور التراتيب ، برهن أن النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f)

7/ بين أنه توجد نقطة من (C_f) يكون عندها ميل المماس يساوي $\dfrac{5}{4}$

8/ أنشئ المستقيمين (D_1) و (D_2) و المنحني (C_f)

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

II−1/ انطلاقا من المنحني (C_f) أشرح كيف نحصل على المنحنيين (C_g) و (C_h) حيث :

$$g(x)=f(|x|) \quad \text{و} \quad h(x)=f(x)+1$$

2/ ارسم عندئذ المنحنيين (C_g) و (C_h) .

مسألة (15) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=(x-1)(2-e^{-x})$$

ليكن (C_f) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1−احسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2−بين ان المستقيم (D) الذي معادلته : $y=2x-2$ مقارب مائل للمنحني (C_f)

3−ادرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) و المستقيم (D).

4−أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=xe^{-x}+2(1-e^{-x})$$

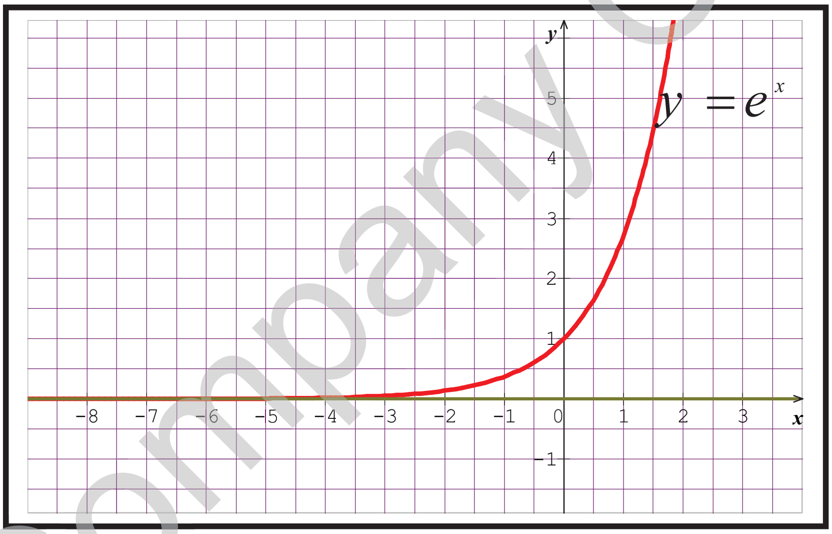
ب) أثبت انه من اجل كل عدد حقيقي x و $x\succ0$ أنه $f'(x)\succ0$

5− ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة 0 وفسر النتيجة بيانيا .

6− شكل جدول تغيرات الدالة f .

7− ارسم المستقيم (D) و المنحني (C_f)

8− عيّن النقطة A من (C_f) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (D).



الهدية

يقول الشاعر أبو القاسم الشابي:

إذا ما طمحت إلى غاية   **لبست المنى وخلعت الحذر**

ولم أتخوف وعور الشعاب   **ولا كبة اللهب المستعر**

ومن لا يحب صعود الجبال   **يعش أبد الدهر بين الحفر**

يقول الإمام الشافعي رحمه الله :

أخي لن تنال العلم إلا بستة   **سأنبيك عنها مخبر إبيان**

ذكاء وحرص وإصطبار وبلغة   **وصحبة أستاذ وطول زمان**

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

سلسلة استعد للبكالوريا رقم (07)

المستوى : ثالثة ثانوي — السنة الدراسية :2008/2007

الشعبـــــة :علوم تجريبية + رياضيات

و تقني رياضي

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

المحور : الدوال الأسية و اللوغاريتمية

الجزء الثاني :الدوال اللوغاريتمية

التمرين (01) عيّن مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\ln(x^2+2x-3)$ 2) $f(x)=\ln(x+2)^2$

3) $f(x)=\ln|x+1|$ 4) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$

5) $f(x)=\ln\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right|$ 6) $f(x)=\ln(x+2)-\ln(x-1)$

7) $f(x)=\ln|x+1|-\ln|x|$ 8) $f(x)=\ln(-2x+3)$

التمرين (02) عيّن مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x-1}$ 2) $f(x)=\ln(\ln(x))$

3) $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{\ln(x)-2}$ 4) $f(x)=\sqrt{\ln(x)}$

5) $f(x)=\sqrt{1-(\ln x)^2}$ 6) $f(x)=\sqrt{1+\ln(x)}$

التمرين (03) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $\ln(3-x)-\ln\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{2}\ln(2x)$

2) $\ln(4x-10)+\ln(2x-2)^2-2\ln(4x-4)=0$

3) $2(\ln x)^3-7(\ln x)^2+3(\ln x)=0$

التمرين (04) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

1) $\ln x \prec 1$ ، 2) $\ln 2x \succ -1$ ، 3) $\ln(2x+3)\prec 4$

4) $\ln(x-2)^2\geq 0$ ، 5) $\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)\leq 0$ ، 6) $2\ln(x-1)+3\geq 0$

التمرين (05) بسط ما يلي :

- $A=\ln e^{3}-\ln e^{2}$
- $B=\ln\left(e\sqrt{e}\right)$
- $C=\ln 2+\ln(8e)-\ln(4e^{2})$
- $D=\ln\left(\frac{1}{e}\right)^{2}-\ln^{2}\left(\frac{1}{e}\right)$

التمرين (06) ادرس إشارة العبارات الجبرية التالية :

1) $2\ln x-1$ ، 2) $\ln^{2}x-\ln x-6\prec 0$ ، 3) $(\ln x-1)\ln x$

4) $\dfrac{2-\ln x}{1+\ln x}$ ، 5) $3+2\ln x$ ، 6) $2x\ln(1-x)$

التمرين (07) حل في $\mathbb{R}^{2}$ الجمل التالية :

1) $\begin{cases} x^{2}+2y=16 \\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=-\ln 3 \end{cases}$ ، 2) $\begin{cases} \ln x+\ln y=\ln\sqrt{3}-2\ln 2 \\ 2(x+y)=\sqrt{3}+1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x.y=4 \\ (\ln x)^{2}+(\ln y)^{2}=\dfrac{5}{2}(\ln 2)^{2} \end{cases}$ ، 4) $\begin{cases} x+y=19 \\ \ln x+\ln y=2\ln 2+\ln 15 \end{cases}$

التمرين (08) احسب النهـــــــــايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ ، 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x+1)}{x}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{\ln x}$

4) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{3}{x}+5\ln x$ ، 5) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\sqrt{x}.\ln x$ ، 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^{2}}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x^{2}+x+1)}{x}$ ، 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+2-\ln(x+1)^{2}\right]$ ، 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

التمرين (09) احسب النهـــــــــايات التالية :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2\ln x}{x+\ln x}$ ، 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2}-2}{x\ln x}$ ، 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x-x^{2})}{x}$

4) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x}}$ ، 5) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\dfrac{1}{x+1}+\ln(x+1)$ ، 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

التمرين (10) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بـــ

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)$$

– أثبت أن الدالة f فردية .

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (11) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بــ: $f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني C_f

3) بيّن أن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $\left]\frac{1}{2};1\right[$

4) ارسم المنحني C_f.

التمرين (12) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بــ:

$$f(x)=(\ln x)^2-\ln x-2$$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحني C_f مع المحورين الإحداثيين .

3) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني C_f

4) ارسم المنحني C_f.

التمرين (13) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بــ: $f(x)=\frac{1+\ln(x^2)}{x}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس شفعية الدالة f

2) ادرس تغيرات الدالة f في المجال $]0;+\infty[$

3) اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني C_f.

4) عيّن احداثيات نقط تقاطع المنحني C_f مع محاور الإحداثيات ثم ارسم المنحني C_f

التمرين (14) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بــ

$$f(x)=x+2+\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|$$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f

2) اثبت أن المنحني الممثل C_f لها يقبل مستقيما مقاربا (Δ) مائلا يطلب إعطاء معادلته.

3) عيّن النقطة ω تقاطع المنحني C_f مع المستقيم (Δ) و أثبت أنها مركز تناظر للمنحني C_f.

4) احسب : $f(-3)$ و $f\left(-\frac{5}{2}\right)$ و $f(-4)$ ثم ارسم المنحني C_f .

التمرين (15) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفـــة بـــ :

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln(x+1)$$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f و ادرس الفروع اللانهائية للمنحني C_f

2) بيّن أن المنحني C_f يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

3) ارسم المنحني C_f

التمرين (16) 1/ لتكن الدالة العددية g المعرفة كما يلي : $g(x)=1-x^2-\ln x$

أ) ادرس تغيرات الدالة g

ب) احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم x في المجال $]0;+\infty[$

2/ لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x)=3-x+\frac{\ln x}{x}$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) ادرس تغيرات الدالة f

ب) أثبت أن المنحني C_f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته

ج) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم (Δ).

د) بيّن أن المنحني C_f يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما x_0 و x_1 حيث :

$\frac{1}{4}\prec x_0\prec 1$ و $3\prec x_1\prec 4$ ثم ارسم المنحني C_f

---

التمرين (17) لتكن الدالة العددية g المعرفة كما يلي: $f(x)=1+(\ln x)^2$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f و حدّد طبيعة الفروع اللانهائية .

2) أثبت أن المنحني C_f يقبل نقطة انعطاف يطلب ω يطلب تعيينها.

3) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني C_f في النقطة ذات الفاصلة $x_0=e$

4) ارسم (Δ) و C_f.

التمرين (18) f الدالة العددية : $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln|x+1|$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني C_f

2) برهن أنه توجد نقطتا انعطاف للمنحني C_f يطلب تعيين إحداثيي كل منهما.

3) جد معادلة كل من المماسين للمنحني C_f عند نقطتي الانعطاف

4) أنشئ هذين المماسين ثم أنشئ المنحني C_f .

إعداد الأستاذ:
جلبلات عمار

التمرين (19) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x و المعرفة كما يلي :

$$f(x)=x-2+\ln(x-1)$$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.(الوحدة : $\frac{1}{2}cm$)

1/ ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني C_f

2/ احسب $f(2)$ واستنتج إشارة $f(x)$

3/ جد معادلة للمماس (Δ) للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 2

4/ احسب احداثيي A نقطة تقاطع C_f مع المستقيم (D) الذي معادلته : $y=x$.

5/ أنشئ (Δ) و C_f .

6/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=2x+m$

التمرين (20) **1–** لتكن φ الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـــ:

$$\varphi(x)=x^2-4x+3+6\ln|x-2|$$

أ- احسب $\varphi(1)$ و $\varphi(3)$

ب-ادرس تغيرات الدالة φ و استنتج إشارة $\varphi(x)$

2– لتكن الدالة f النعرفة كما يلي : $f(x)=x+2-\dfrac{5}{x-2}-\dfrac{6\ln|x-2|}{x-2}$

أ- بيّن أن : $f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{(x-2)^2}$

ب- استنتج تغيرات الدالة f.

ليكن (Γ) المنحني البياني للدالة f في مستو منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

جـــ- ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (Γ).

د- احسب $f(-1)$ ، $f(0)$ ، $f(4)$ ، $f(-4)$ بالتقريب إلى $\frac{1}{10}$.

3– تحقق أن النقطة $\omega(2;4)$ مركز تناظر للمنحني (Γ) ثم ارسم المنحني (Γ).

التمرين (21) f الدالة العددية : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}-2\ln x$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني C_f.

2/ أنشئ المنحني C_f .

3/ استنتج إنشاء (Γ) المنحني الممثل للدالة g المعرفة كما يلي : $g(x)=\dfrac{x^2-1}{|x|}-\ln x^2$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (22) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x و المعرفة كما يلي :

$$f(x)=x+\ln\left|e^{x}-2\right|$$

وليكن C_f منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1/ ادرس تغيرات الدالة f

2/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من مجموعة تعريف الدالة f ، يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=2x+\ln\left|1-2e^{-x}\right|$

3/ بيّن أن C_f يقبل مستقيمين مقاربين (Δ) و (Δ') معادلتهما على التوالي :

$$y=2x \quad ، \quad y=x+\ln 2$$

4/ عيّن نقاط تقاطع C_f مع محور الفواصل.

5/ أنشئ المنحني C_f.

التمرين (23) ادرس تغيرات كل دالة من الدوال التالية و الفروع اللانهائية للمنحني الممثل لها ثم ارسم تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1/ $f(x)=\ln(x-2)^2$ ، **2/** $f(x)=\ln x+(\ln x)^2$ ، **3/** $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}+\ln|x+1|$

4/ $f(x)=\dfrac{1}{x}(1+\ln x)$ ، **5/** $f(x)=\dfrac{x+3+2\ln(x+1)}{x+1}$ ، **6/** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\ln|x|$

7/ $f(x)=x^2-3x+\dfrac{5}{2}\ln|2x+3|$ ، **8/** $f(x)=\ln(x^2-2x+2)$

9/ $f(x)=\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$ ، **10/** $f(x)=-2x+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ ، **11/** $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

12/ $f(x)=x^2-2x-\ln(x-1)^2$ ، **13/** $f(x)=\ln\dfrac{1}{2}\left(e^{x}-2\right)^2$

التمرين (24) I- نعتبر العدد الطبيعي n حيث : $n=2^{1234}$

أ) عيّن بإستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log n$.

ب) استنتج الحصر التالي : $10^{371}\leq n \prec 10^{372}$ ثم حدد عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد n

II- 1. ما قيمة pH محلول يحتوي على $5\times10^{-8}\,moles$ من شوارد H^+ في اللتر الواحد ؟

2. ما هو التركيز المولي بشوارد H^+ لمحلول متعادل $(pH=7)$ ؟

III- حل في $\mathbb{R}$ ما يلي : $\log(x)=5$ ، $\log(x)=-3$ ، $\log(x)\geq 0.1$ ، $\log(x)\prec\log(1-x)$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (25) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية حدودها موجبة معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = e^2 \\ (u_{n+1})^2 . e = u_n \end{cases}$$

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة كما يلي : $v_n = \dfrac{1+\ln u_n}{2}$

1/ أثبت أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

2/ اكتب v_n ثم u_n بدلالة n .   3/ ادرس تقارب المتتالية (u_n)

4/ احسب المجموع S بدلالة n حيث : $S = u_1 + u_2 + ... + u_n$

5/ ما هي طبيعة المتتالية (t_n) حيث : $t_n = \ln u_n$

التمرين (26) 1- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدودها موجبة حيث :

$$\ln u_1 + \ln u_5 = -12 \quad \text{و} \quad \ln u_2 - \ln u_4 = 4$$

- عيّن أساس هذه المتتالية الهندسية وحدها u_0 . احسب u_n بدلالة n
- نسمي S_n المجموع : $u_0 + u_1 + ... + u_n$. احسب S_n بدلالة n ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

2- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $v_n = \ln u_n + \ln u_{n+1}$

- بيّن أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.
- نسمي T_n المجموع : $v_0 + v_1 + ... + v_n$. عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون : $T_n{}^2 = 2^{30}$

التمرين (27) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية هندسية حدودها موجبة حيث : $\begin{cases} u_3 - u_1 = 3\ln 2 \\ u_1 u_2 u_3 = 8(\ln 2)^3 \end{cases}$

1/ عيّن u_2 ثم u_1 و u_3 ثم الأساس r لهذه المتتالية .

2/ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

3/ عيّن n بحيث : $S_n = 31.\ln 2$

التمرين (28) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

1. بالنسبة لكل دالة من الدوال التالية اشرح كيف يتم الحصول على منحنييها البياني (C) انطلاقا من التمثيل البياني (Γ) للدالة اللوغاريتمية النيبيرية ثم أرسم (C).

أ) $f(x) = 1 + \ln x$ ب) $g(x) = -\ln x$

جـ) $h(x) = \ln(x+2)$ د) $k(x) = 1 + \ln(x-1)$

2. نعتبر الدالتين φ و ψ المعرفتين على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $\varphi(x) = \ln(|x|)$ و $\psi(x) = |\ln(|x|)|$

نرمز إلى منحنييهما البيانيين على التوالي بـِ (C_φ) و (C_ψ).

- بين أن المنحني (C_φ) متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب ثم أرسمه.
- أرسم المنحني (C_ψ) انطلاقا من المنحني (C_φ).

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

مسألة (01) 1. نعتبر الدالة g ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=x^2+3-2\ln x$$

أ) ادرس اتجاه تغييرات الدالة g.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

2. لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}$$

C تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة $2cm$.

أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$

استنتج اتجاه تغير الدالة f.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$، فسر هذه النتيجة بيانيا.

ج) احسب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

ليكن D المستقيم الذي معادلته $y=\dfrac{1}{2}x$، احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{1}{2}x\right)$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

د) أنشئ جدول تغيرات الدالة f.

هـ) أنشئ المستقيم D و المنحنى C الممثل للدالة f.

مسألة (02) المستوي منسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ متعامد ومتجانس.

1. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+1-\ln x$

ادرس تغيرات الدالة g. بين أن $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ موجب، استنتج إشارة $g(x)$.

2. لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+\dfrac{\ln x}{x}$

أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f، عين نهايتي f عند 0 و عند $+\infty$.

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

ج) بين أن المستقيم d الذي معادلته $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f.
عين النقطة التي يقطع عندها المستقيم d المنحنى (C_f).
د) أنشئ المنحنى (C_f).

مسألة (03) الدالة العددية f معرفة على المجال I حيث $I=]-2;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=1+x\ln(x+2)$$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) أحسب $f'(x)$ و $f''(x)$ من أجل كلّ عدد من I.
ب) عيّن إشارة $f''(x)$ ثمّ استنتج وجود عدد حقيقي وحيد α من المجال $[-0,6;-0,5]$
بحيث $f'(\alpha)=0$.
2. أدرس تغيّرات الدالة f .
3. بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{\alpha+2-\alpha^2}{\alpha+2}$ ثمّ استنتج حصرا لـــ $f(\alpha)$.
4. M_0 نقطة من (C) فاصلتها x_0 و (T_{x_0}) المماس للمنحني (C) في M_0 .
أ) بيّن أنّ (T_{x_0}) يمرّ بالمبدأ O إذا وفقط إذا كان $f(x_0)=x_0f'(x_0)$.
ب) استنتج وجود مماسين (T_a) و (T_b) يمرّان بالمبدأ O. عيّن العددين a و b.
5. أرسم المماسين (T_a) و (T_b) ثمّ المنحني (C).

مسألة (04) : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=3\ln x-(\ln x)^2$$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- بيّن أن المستقيم ذا المعادلة $x=0$ مقارب لـــ (C).
2- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3- احسب $f'(x)$ ، حيث f' الدالة المشتقة للدالة f .
4- حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $3-2\ln x=0$ ثم المتراجحة $3-2\ln x\succ 0$
مستنتجا إشارة $f'(x)$.
5- اكتب جدول تغيرات الدالة f .
6- حل في $]0;+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$ وفسر النتيجة هندسيا.
أنشئ المنحني (C).

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

مسألة (05) نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{x-1}{x+2}+\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1- ادرس تغيرات الدالة f

2- بيّن أن (C) يقبل عند نقطتين منه A و B مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي 1 ، عيّن عندئذ إحداثيات نقطتي التماس A و B .

3- بيّن ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $x_0\in\left]\frac{13}{4};\frac{7}{2}\right[$

4- احسب $f(2)$ ، $f(-5)$ ، $f(-3)$ ثم أنشئ (C)

5- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $(x+2)\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)-mx-2m-3=0$

مسألة (06) **الجزء الأول** :نعتبر الدالة العددية g المعرفة كما يلي : $g(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln(x)$

1- ادرس تغيرات الدالة g.   2- استنتج أنه لكل $x\in\mathbb{R}_+^*$ فإن : $g(x)\geq\frac{1}{2}$.

الجزء الثاني : f الدالة العددية : $x\to f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{\ln x}{x}$

(δ) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أثبت أنه لكل $x\in\mathbb{R}_+^*$ فإن : $f'(x)=\frac{1+g(x)}{x^2}$

2) ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني (δ)

3) ادرس وضعية المنحني (δ) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل

4) أثبت أن المنحني (δ) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.

5) (Δ) هو مماس للمنحني (δ) في النقطة ذات الفاصلة x_0 ، عيّن x_0 إذا كان ميل (Δ) هو $\frac{1}{2}$ ثم اكتب معادلة (Δ)

6) أثبت أن المنحني (δ) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_1 حيث : $\frac{1}{2}\prec x_1\prec 1$

7) أنشئ (Δ) و (δ) (تؤخذ $2cm$ وحدة للطول)

8) ناقش بيانيا وحسي قيم الوسيط m وجود وعدد حلول المعادلة : $f(x)=\frac{1}{2}x+m$

مسألة (07) نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{3}{x}-x+4.\ln x$

(δ) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني (δ).

2) احسب : $f(5)$ و $f(9)$ و $f(10)$ وتحقق أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا محصورا بين 9 و 10

3) أثبت أن المنحني (δ) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها ثم اكتب معادلة المماس في هذه النقطة

4) برهن على أنه يوجد مماسان للمنحني (δ) معامل توجيه كل منهما $\frac{1}{4}$

5) ارسم المنحني (δ)

6) نعتبر الدالة العددية g المعرفة كما يلي : $g(x)=\frac{3-x^2}{|x|}+2\ln x^2$

أ) أثبت أن الدالة g زوجية

ب) ارسم المنحني $\left(C_g\right)$ الممثل للدالة g انطلاقا من رسم المنحني (δ).

مسألة (08) نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي: $f(x)=(x+2)-2\ln|2x+1|$

$\left(C_f\right)$ المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

I) **1**- ادرس تغيرات الدالة f و الفروع اللانهائية للمنحني $\left(C_f\right)$

2- بيّن أن المنحني $\left(C_f\right)$ يقبل مماسا (Δ) معامل توجيهه (-3) .اكتب معادلة لــ (Δ)

3- احسب إحداثيات نقطتي تقاطع $\left(C_f\right)$ مع المستقيم ذي المعادلة $y=x$

4- **احسب** $f(-1)$ **و** $f(0)$. ارسم المماس (Δ) و المنحني $\left(C_f\right)$.

5- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m وجود وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

II) نعتبر الدالة العددية g المعرفة كما يلي : $g(x)=\frac{3}{2}+\left|x+\frac{1}{2}\right|-\ln(2x+1)^2$

1-أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x **يختلف عن** $\left(\frac{-1}{2}\right)$ **يكون لدينا :**

$$g(-1-x)=g(x) \quad \text{و} \quad -1-x\neq-\frac{1}{2}$$

2-استنتج أن (Γ) المنحني الممثل للدالة g يقبل محور تناظر يطلب تعيين معادلته

3-أثبت أن $g(x)=f(x)$ على مجال يطلب تعيينه.

4-استنتج إنشاء (Γ) انطلاقا من $\left(C_f\right)$. ارسم (Γ) في نفس المعلم السابق

مسألة (09) **I**. f و g دالتان معرفتان على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2} \text{ و } f(x)=\ln(1+x)-x$$

1. ادرس تغيرات كل من f و g على $[0;+\infty[$.
2. استنتج أنه من أجل كل $x\geq 0$: $x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x$

II. نريد دراسة المتتالية (u_n) للأعداد الحقيقية المعرفةكما يلي: $u_1=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

1. برهن بالتراجع أن $u_n>0$ من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$
2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$:

$$\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

3. نضع $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+....+\frac{1}{2^n}$ و $T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+....+\frac{1}{4^n}$

باستعمال الجزء I ، بين أن: $S_n-\frac{1}{2}T_n\leq \ln u_n\leq S_n$

4. احسب S_n و T_n بدلالة n. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$
5. أ- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة ، لتكن ℓ نهايتها.

جــ- نقبل النتيجة التالية: " إذا كانت متتاليتان (v_n) و (w_n) متقاربتان حيث $v_n\leq w_n$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\leq \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ "

د- بين إذن أن: $\frac{5}{6}\leq \ln\ell\leq 1$. استنتج حصرا لــ ℓ.

مسألة (10) نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي: $f(x)=-x+\frac{\ln x}{x}$

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1) برهن أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيينهما
2) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل
3) نعتبر الدالة φ المعرفة كما يلي : $\varphi(x)=-x^2+1-\ln x$

أ) ادرس تغيرات الدالة φ. ب) احسب $\varphi(1)$ ثم استنتج إشارة $\varphi(x)$

4) ادرس تغيرات الدالة f
5) ارسم المنحني (C_f)

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

مسألة (11) I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=xe^{-x}$

1- ادرس تغيرات الدالة g.   2- استنتج أنه لكل $x\in[0;+\infty[$ فإن : $g(x)\prec 1$

II- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$: $f(x)=e^{-x}+\ln x$

1- احسب : $\lim\limits_{x \underset{\succ}{\longrightarrow} 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2- احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم ادرس طبيعة هذا الفرع اللانهائي

3- بيّن أن : $f'(x)=\dfrac{1-g(x)}{x}$

4- شكل جدول تغيرات الدالة f

5- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]0.5;0.6[$

6- ارسم المنحني C الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس .

مسألة (12) m عدد حقيقي ، نعتبر الدالة f_m المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f_m(x)=\frac{x^2-1}{2}-m\ln x \quad ، \quad C_m \text{ تمثيلها البياني}$$

1- أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$.   ب) حسب قيم الوسيط m ، احسب نهاية f_m عند 0

2- عيّن الدالة المشتقة للدالة f_m .

أعط حسب قيم m ، مختلف جداول التغيرات الممكنة

3- لتكن $M_0(x_0,y_0)$ نقطة من المستوي بحيث : $x_0\succ 0$ و $x_0\neq 1$

أ) برهن أنه يمر منحني وحيد C_m بالنقطة M_0.

ب) بيّن أنه توجد نقطة وحيدة A تنتمي إلى كل المنحنيات C_m.

4- ارسم C_0 ، C_4 ، C_{-1} في نفس المعلم

مسألة (13) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\ln\left(e^{2x}-e^{x}+1\right)$

(C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1. أ- ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب-عين الدالة المشتقة للدالة f .

ج-ادرس إشارة $f'(x)$.استنتج تغيرات f .

2. أ- بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=2x$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

ب- ارسم المستقيم D والمنحني (C).

3. k عدد حقيقي موجب تماما

ناقش حسب قيم k عدد حلول المعادلة $e^{2x}-e^{x}+1-k=0$

أ) بالحساب.   ب) باستعمال تغيرات الدالة f.

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

مسألة (14) f دالة عددية معرفة على $]-\infty;3[$ كما يلي: $f(x)=-40\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)-10x$

و (C)تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$ (الوحدة: $1cm$).

الجزء الأول:

1. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا ظاهرا.
2. ادرس اتجاه تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty;3[$.
3. احسب $f(-1)$ و $f(3-3e)$. تعطى في كل حالة النتيجة المضبوطة ثم بتقريب $\frac{1}{10}$.
4. أ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا، وحلا وحيدا α في المجال $[3-3e;-1]$ (لا يطلب حساب α).

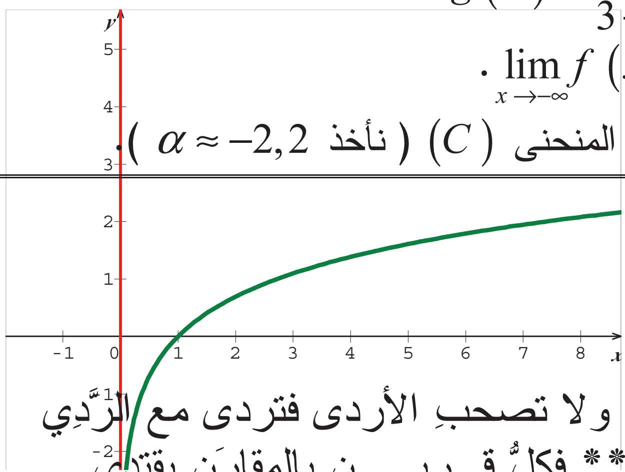
ب) بين أن $\ln\left(1-\frac{\alpha}{3}\right)=-\frac{\alpha}{4}$. ج) اعط قيمة للعدد α بتقريب $\frac{1}{10}$.

الجزء الثاني: 1.أوجد $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

2. نعرف على $]-\infty;3[$ الدالة g كما يلي: $g(x)=\frac{f(x)}{3-x}$.

أ) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=10$. ب) استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3. ارسم المماس T في النقطة التي فاصلتها 0 ثم المنحنى (C) (نأخذ $\alpha\approx-2{,}2$).



الهدية

اخترت لك:

إذا كنتَ في قومٍ فصاحِب خِيارَهم *** ولا تصحبِ الأردى فتردى مع الرَّدِي

عن المرءِ لا تَسَلْ وسَلْ عن قرينهِ *** فكلُّ قـــريــــنٍ بالمقارَنِ يقتدِي

أثبتت الابحاث الحديثة أن درجة الحفظ تكون عالية في الأيام الأولى للتعلم وسرعان ما تضعف إذا لم يتم تأكيدها بالمراجعة والتكرار

ـ ثبت ان الحفظ على ظهر قلبأي بدون فهم حقيقي يكون أكثر عرضة للنسيان في الحفظ للمادة المفهومة فلاشك أنه من السهل أن يحفظ الطالب جملة مفيدة مفهومة في لغته الأصلية بعكس الحال عندما يحاول تعلم جملة أخرى لا تزيد عنها في الكلمات والحروف ولكنها من لغة أجنبية مجهولة

ـ أيضاً ثبت أن لفهم القصيدة الشعرية دوراً كبيراً في تسهيل حفظها

ـ ومن المهم التمرين على التطبيق لما تم حفظه لتثبيته فعلاً مثلاً يستطيع الطالب أن يحفظ معاني ألف كلمة إنجليزية لكن إذا لم يتمرن على استخدامها فعلياً فتقل درجة حفظه لهذه الكلمات تدريجا

سلسلة استعد للبكالوريا رقم (02)

المستوى : ثالثة ثانوي — السنة الدراسية: 2008/2007

الشعبـــــة : علوم تجريبية + رياضيات

و تقني رياضي

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

المحور: الجداء السلمي في الفضاء والمستقيمات والمستويات وتطبيقاته

التمارين من 1 إلى 3 مراجعات الهندسة المستوية

التمرين (01) : ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. لتكن النقط :

$A(1;3)$ ، $B(3;0)$ و $C(-5;-1)$

1. أثبت أن المثلث ABC قائم .
2. عيّن معادلة للدائرة المحاطة بالمثلث ABC. 3 .عيّن معادلة لمماس هذه الدائرة في A.

التمرين (02) : ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

نعتبر النقطتين $A(1;2)$ و $B(0;5)$ والدائرة (C) التي معادلتها : $x^2+y^2-2x-3=0$

1. عيّن التمثيل الوسيطي ومعادلة ديكارتية للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة$(-1;1)$ وشعاع توجيه له $\vec{u}(2;1)$.
2. حدد مركز ونصف قطر الدائرة (C) و تأكد أن $A\in(C)$.
3. أ)حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المار من B و $\vec{n}(3;4)$ شعاع ناظمي له.
ب) بيّن أن تقاطع (C) و (Δ) مجموعة خالية
4. تأكد أن (D) و(C) يتقاطعان وحدد تقاطعهما.
5. احسب المسافة بين مركز الدائرة (C) والمستقيم (D) بطريقتين.

التمرين (03) ABC مثلث قائم في A حيث AB=3 و AC=4

ليكن G مرجح $(A;1)$ ، $(B;-2)$ و $(C;3)$

I) أ) أنشئ النقطة G واحسب: GA^2 ، GB^2 و GC^2 .

ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $MA^2-2MB^2+3MC^2=k\ (k\in R)$

II) ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $(A;\vec{i};\vec{j})$ **حيث** : $\vec{i}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\vec{j}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

أ) عيّن إحداثيات النقطة G واحسب: GA^2 ، GB^2 و GC^2.

ب)عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $MA^2-2MB^2+3MC^2=k\ (k\in R)$

Descartes dit dans sa géométrie(1637):la géométrie analytique est l'art de résoudre les problèmes de géométrie par le calcul.

التمرين (04) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء.

تعطى النقط : $A(1;0;2)$ ، $B(0;2;1)$ ، $C(2;1;0)$ ، $D(2;4;3)$

1.برهن أن الشعاع $\vec{V}(1;1;1)$ عمودي على المستوي (ABC) .

2.استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3.تحقق أن الرباعي ABCD هو رباعي وجوه.

4. احسب حجم المجسم الرباعي ABCD.

التمرين (05) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء محاوره (OX) ، (OY) ، (OZ)

نعتبر النقطة $A(1;-2;4)$ و المستوي (P) الذي معادلته : $2x-3y+z+2=0$

1. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة **A** ويعامد المستوي (P) .

2. عيّن إحداثيات النقطة B نقطة تقاطع (Δ) و (P) .

3. اكتب معادلة لسطح الكرة التي مركزها **A** والتي تمس المستوي (P) .

4. عيّن إحداثيات C; D نقطتي تقاطع سطح الكرة والمستقيم (OZ)

5. ما هي إحداثيات مركز ثقل رباعي الوجوه ABCD .

التمرين (06) : في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء .نعتبر المستوي(P) وسطح الكرة (S) المعرفين على التوالي بالمعادلتين الديكارتيتين :

$(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ ، $(P): x-2y+2z-2=0$

1. حدد مركز ونصف قطر سطح الكرة (S).

2. بيّن أن المستوي (P) مماس لسطح الكرة (S).

3. حدد نقطة تماس المستوي (P) وسطح الكرة (S).

التمرين (07) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء. نعتبر المستويين المعرفين بالمعادلتين التاليتين : $(P): x+2y-z+1=0$ و $(P'): -x+y+z=0$ و النقطة $A(0;1;1)$

1. بيّن أن المستويين متعامدان

2. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) تقاطع المستويين (P) و(P´)

3. عيّن بعد النقطة A عن المستوي (P) وعن (P´)

4. استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (d)

التمرين (08) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء.نعتبر النقطة $A(2;0;2)$ والمستوي (P) ذا المعادلة : $x+y-z-3=0$

1. حدد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D)المار من A والعمودي على المستوي (P).

2. حدد إحداثيات B نقطة تقاطع المستقيم (D) والمستوي (P).

3. نعتبر سطح الكرة (S) التي مركزها A والتي تقطع المستوي (P) وفق الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها 2.

أ- حدد نصف قطر سطح الكرة (S)

ب- اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S).

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (09) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء .تعطى النقطتين A(3; 0 ; 6) و I(0; 0 ; 6) وليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطتين A و I نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بالمعادلتين التاليتين : $(P): 2y+z-6=0$ و $(Q): y-2z+12=0$

1.بيّن أن المستويين (P) و (Q) متعامدان

2.بيّن أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D)

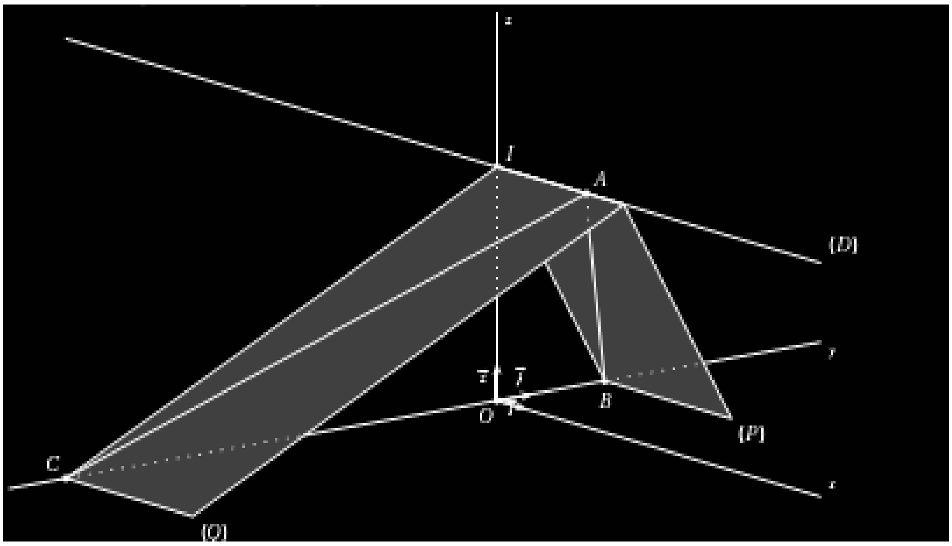
3.بيّن أن المستويين (P) و (Q) يقطعان ، على الترتيب ،المحور $(O;\vec{j})$ في النقطتين B و C

4. اثبت أن معادلة للمستوي (T) يشمل النقطة B والشعاع $\overrightarrow{AC}$ ناظمي له هي :

$$x+4y+2z-12=0$$

5. أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (OA) .برهن أن المستقيم (OA) والمستوي (T) يتقاطعان في نقطة H يطلب تعيين إحداثياتها.

6.ماذا تمثل النقطة H بالنسبة للمثلث ABC ؟ علل جوابك.



التمرين (10) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء. تعطى النقط :

C(2; 1 ; -2) ، B(1; -1 ; 1) ، A(1; 2 ;-2)

1.أ) بيّن أن النقـــط A، B و C تعيّن مستويا.

ب) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2.لتكن (S) سطح الكرة التي مركزها $\Omega(1,1,1)$ ونصف قطرها $R=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

أ- بيّن أن المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S) ثم حدد إحداثيات H نقطة تماس (ABC) و(S)

ب- لتكن $M(a,b,c)$ نقطة من المستوي (ABC) .بيّن أن : $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$

التمرين (11) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء.نعتبر المستوي (P) ذو المعادلة :

$$2x+y-2z+4=0$$

و النقط :(A(3; 2 ; 6 ، B(1; 2 ; 4) ، C(4; -2 ; 5)

1.أ) بيّن أن النقـــط A، B و C تعيّن مستويا .ب– بيّن أن هذا المستوي هو المستوي (P) .

2. أ) بيّن أن المثلث ABC قائم

ب) Δ مستقيم يشمل O ويعامد المستوي (P) ، أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ

جـ) K المسقط العمودي للنقطة O على (P) . احسب OK

د) احسب حجم الرباعي OABC

3. نعتبر الجملة المثقلة : $S=\left\{(O;3),(A;1),(B;1),(C;1)\right\}$

أ) بيّن أن هذه الجملة تقبل مرجحا

ب) نرمز بـــ I إلى مركز ثقل المثلث ABC . بيّن أن G تنتمي إلى المستقيم (OI) .

جـ) عيّن المسافة بين G والمستوي (P)

4. أ) عيّن (E) مجموعة M من الفضاء التي تحقق : $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=5$

ب) ما هي مجموعة النقط المشتركة بين (P) و(E) .

التمرين (12) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء .تعطى النقط :

(A(2; 1 ; 3 ، B(-3; -1 ; 7) ، C(3; 2 ; 4)

1.أثبت أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة.

2. ليكن (d) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي : $(t\in R)$ $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t \\ z=4+t \end{cases}$

أ) بيّن أن المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC) .

ب) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3. لتكن H النقطة المشتركة للمستقيم (d) والمستوي (ABC).

أ) بيّن أن النقطة H مرجح الجملة $\left\{(A;-2),(B;-1),(C;2)\right\}$

ب)عيّن طبيعة المجموعة(Γ_1) للنقط M من الفضاء والتي تحقق :

$$\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$$

وحدد العناصر المميزة

جـ) عيّن طبيعة المجموعة(Γ_2) للنقط M من الفضاء والتي تحقق :

$$\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$$

وحدد العناصر المميزة

د) عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة $(\Gamma_1\cap\Gamma_2)$.

هـ) هل النقطة (S(-8; 1 ; 3 تنتمي للمجموعة $(\Gamma_1\cap\Gamma_2)$.

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (13) الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1. نعتبر المستوي (P) الذي يشمل النقطة B(1; -2 ; 1) و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له.والمستوي (R) المعرف بالمعادلة الديكارتية : $x+2y-7=0$.

أ- بيّن أن المستويين (P) و(R) متعامدان.

ب- برهن أن تقاطع المستويين (P) و(R) هو المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة(-1 ; 4 ; -1)C وشعاع توجيه له . $\vec{u}(2;-1;1)$

جـ) لتكن النقطة (-1 ; -2 ;5)A . احسب بعد النقطة A عن المستوي (P) ثم بعد النقطة A عن المستوي (R) .

د) عيّن بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

2. أ) من أجل كل عدد حقيقي t ، نعتبر النقطة $M_t(1+2t;3-t;t)$.

- عيّن بدلالة t الطول AM_t .ونرمز لهذا الطول بـــ $\varphi(t)$.ونعرف الدالة φ من R في R.

ب) ادرس إتجاه تغير الدالة φ واستنتج القيمة الحدية الصغرى لها .

جـ) فسّر هندسيا هذه القيمة الحدية الصغرى.

التمرين (14) : الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

النقطة (3 ; -1 ;1)A والمستوي (P) الذي معادلته : x-y+3z=0

1.أ) تحقق من أن : $(t\in R)$ $\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=3t \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (OA) .

ب) حدد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) العمودي على المستقيم في النقطة A

ج) تحقق من أن (P) يوازي المستوي (Q) .

2. نعتبر سطح الكرة (S) المماسة للمستوي (Q) في A والتي يقطعها المستوي (P) وفق الدائرة Γ التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{33}$.

أ) بيّن أن Ω(a;b;c) مركز سطح الكرة (S) ينتمي إلى (OA) ثم استنتج أن : b=-a و c=3a

ب) بيّن أن : $\Omega A^2 - \Omega O^2 = 33$ ثم استنتج أن : a-b+3c=-11

ج) استنتج إحداثيات Ω مركز سطح الكرة (S) وبيّن أن نصف قطرها يساوي $2\sqrt{11}$.

التمرين (15) نعتبر المكعب ABCDEFGH .

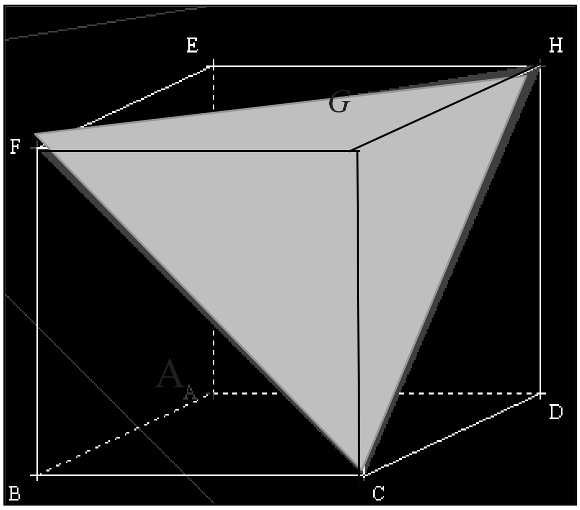
1. بين أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (CFH).(الشكل 1)

2. أحسب الجداء السلمي $\overline{AE}.\overline{HC}$.(الشكل 2)

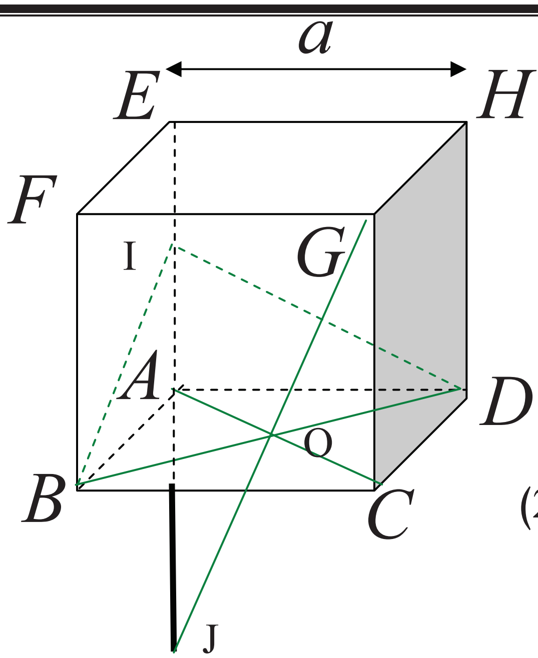
3. نعتبر النقطة I منتصف الحرف [AE] والنقطة J بحيث تكون النقطة A منتصف القطعة[EJ]

- أثبت أن المستوي (BDI) هو مستوي محوري للقطعة [GJ] . (الشكل 2)

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار



(الشكل 1)



(الشكل 2)

التمرين (16) : A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء ، ليست على استقامة واحدة . k عدد حقيقي

من المجال $[-1\,;\,1]$. G_k مرجح الجملة $\left\{(A;k^2+1),(B;k);(C;-k)\right\}$.

1) مثل النقط A ، B ، C و I منتصف $[BC]$ ثم أنشئ النقطتين G_1 و G_2

2) a) بين أنه من أجل كل k من المجال $[-1\,;\,1]$ لدينا : $\overrightarrow{AG_k}=\dfrac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$

b) شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $[-1\,;\,1]$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{-x}{x^2+1}$

c) استنتج مجموعة النقط G_k لما k يمسح المجال $[-1\,;\,1]$

3) عين (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

4) عين (F) مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

5) الفضاء منسوب الآن إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، النقط A ، B ، C تأخذ الإحداثيات $(0\,;0\,;2)$ ، $(-1\,;2\,;1)$ و $(-1\,;2\,;5)$ على الترتيب.

a) عين إحداثيات G_1 و G_2 ، تحقق أن (E) و (F) يتقاطعان.

b) أحسب نصف قطر الدائرة (C) تقاطع (E) و (F) .

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (17) نعتبر المكعب $OABCO'A'B'C'$ و لتكن J منتصف [OA] و G مرجح الجملة $\{(O;1),(A;1),(C;3)\}$. حرف المكعب يؤخذ كوحدة .

I) 1) تحقق أن الشعاعين $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{CJ}$ مرتبطان خطيا ثم عين G على الشكل

2) ما هي إحداثيات G في المعلم $(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OO'})$؟

II) 1) M نقطة كيفية من الفضاء ، عبّر عن $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}$ بدلالة $\overrightarrow{MG}$.

2) عيّن طبيعة (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$$\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{MB}=0$$

III) 1) عيّن (F) مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$$\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MC}\right)=0$$

2) تحقق أن الشعاعين $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{CJ}$ متعامدان و استنتج أن B نقطة من (F) و B' هي أيضا نقطة من (F)

3) – أنشئ تقاطعات (F) مع أوجه المكعب .

– K و K' نقطتا تقاطع (F) مع المستقيمين (OC) و ($O'C'$) على الترتيب ، ما طبيعة الرباعي $BKK'B'$ ؟

VI) عين (H)مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'G}=2$

V) 1) باستعمال الإحداثيات في المعلم المذكور أعلاه ، أحسب GO^2 . GA^2 و GC^2 ثم العدد

$$GC^2+GA^2+GO^2$$

2) M نقطة من الفضاء ، عبّر عن $MO^2+MA^2+3MC^2$ بدلالة MG^2 (باستعمال الشعاع $\overrightarrow{MG}$ وعلاقة شال).

3) نسمي (L) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق $MO^2+MA^2+3MC^2=4$.

a) بين أن O تنتمي لــ (L)

b) تحقق أن M نقطة من (L) إذا وفقط إذا $MG^2=k^2$ حيث k عدد حقيقي يطلب تعيينه .

c) استنتج طبيعة (L) ثم أنشئ تقاطع (L) مع الوجه $OABC$ (أي أثر (L) على الوجه $OABC$ للمكعب).

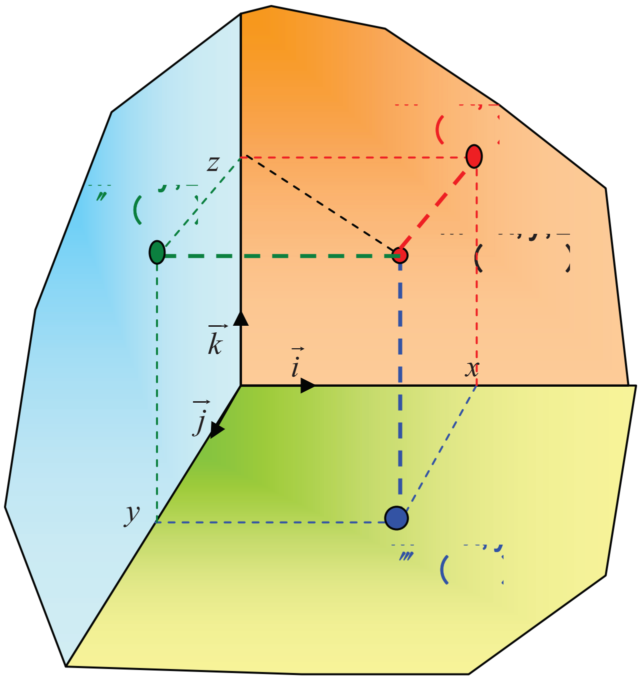
إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (18) : الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط التالية A(1 ; 2 ; 3) ، B(3 ; 2 ; 1) و C(1 ; 3 ; 3)

1) بين أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا ، أكتب معادلة ديكارتية له .

2) نعتبر المستويين (P_1) ، (P_2) حيث : $(P_1): x-2y+2z-1=0$ و $(P_2): x-3y+2z+2=0$



a) بين أن (P_1) ، (P_2) يتقاطعان

و ليكن (Δ) تقاطعهما

b) تحقق أن النقطة C تنتمي

إلى المستقيم (Δ)

c) أثبت أن الشعاع $\vec{u}(2;0;-1)$

شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

d) استنتج تمثيلا وسيطيا لـ (Δ)

2) لحساب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) الممثلة وسيطيا بالجملة

$$\begin{cases} x=2k+1 \\ y=3 \\ z=-k+3 \end{cases}$$ مع $t\in R$

نعتبر النقطة M ذات الوسيط k من المستقيم (Δ)

a) عين قيمة k حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين

b) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ)

التمرين (19) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر المستقيمات d_1 ، d_2 ، d_3 ممثلة وسيطيا على الترتيب

$d_1: \begin{cases} x=-2+5t \\ y=-1-t \\ z=3+4t \end{cases}$ $(t\in R)$ ، $d_2: \begin{cases} x=1-t' \\ y=4+3t' \\ z=5-t' \end{cases}$ $(t'\in R)$ ، $d_3: \begin{cases} x=-7+7t'' \\ y=-3t'' \\ z=2t'' \end{cases}$ $(t\in R)$

– أدرس تقاطع d_1 و d_2 ثم d_1 و d_3

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (20) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط التالية A(3 ; 0 ; 10) ، B(0 ; 0 ; 15) و C(0 ; 20 ; 0)

1) a) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

b) بين أن (AB) يقطع حال مل محور الفواصل في نقطة (9 ; 0 ; 0)

c) علل لماذا A ، B و C ليست على استقامة واحدة .

2) H نقطة تقاطع الارتفاع المرسوم من O في المثلث OBC مع المستقيم (BC)

a) بين أن المستقيم (BC) عمودي على المستوي (OEH) .

– استنتج أن (EH) هو الارتفاع المرسوم من E في المثلث EBC .

b) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (OEH)

c) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

d) بين أن الجملة : $\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases}$ تقبل حلا وحيدا . ماذا يمثل هذا الحل ؟

e) أحسب البعد OH . استنتج أن EH = 15 و مساحة المثلث EBC .

3) بحساب حجم رباعي الوجوه OEBC بطريقتين ، استنتج بعد النقطة O عن المستوي (ABC)

– هل يمكن توقع هذه النتيجة من (2 , c)

التمرين (21) ABC مثلث ، نضع $AB = c$ ، $BC = a$ ، $AC = b$ نعتبر A' مرجح الجملة $\{(B;b);(C;c)\}$

1) نعرف النقطة B' بـــ : $\overrightarrow{AB'} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}$

بين أن B' مرجح النقطتين A و B مرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما .

2) لتكن C' مرجح الجملة $\{(A;b);(C;c)\}$ ، بين أن $AB'A'C'$ معين .

3) لتكن I مرجح الجملة $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$، بين أن I هو مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC.

التمرين (22) : منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط التالية A(4 ; 0 ; -3) ، B(2 ; 2 ; 2) ، C(3 ;-3 ;-1) و D(0 ; 0 ; -3) .

1) عين معادلة ديكارتية لمستوي محور [AB] (ليكن (P) هذا المستوي) .

2) نقبل فيما يلي أن المستويين محوري القطعتين

[BC] و [DC] معرفان بالمعادلتين 2x-10y-6z-7=0 و 3x-3y+2z-5=0 على الترتيب .

أ)- بين أن تقاطع هذه المستويات الثلاثة هو نقطة E يطلب تعيين إحداثياتها .

ب)- بين أن النقط A ، B ، C ، D تقع على سطح كرة مركزها E يطلب تعيين نصف قطرها .

التمرين (23) نعتبر المستويين المعرفين بمعادلتين ديكارتين كما يلي :

$$(P): x + y = -1 \quad ، \quad (R): 2x + y + 2z = 0$$

1) تحقق أن المستويين يتقاطعان وفق مستقيم (D) يشمل النقطة A(1 ; -2 ; 0) و موجه بالشعاع $\vec{u}(-2;2;1)$

2) بين أن المستقيم (D) و المستوي (P') الذي معادلته 4 x + 4 y + z + 3 = 0 يتقاطعان

3) استنتج حل الجملة

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 4x + 4y + z + 3 = 0 \end{cases}$$

التمرين (24) (مراجعة حساب المثلثات و الهندسة المستوية)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. تعطى النقط :

$A(\cos\theta;\sin\theta)$ ، $B\left(\cos(\theta+\frac{2\pi}{3});\sin(\theta+\frac{2\pi}{3})\right)$ ، $C\left(\cos(\theta-\frac{2\pi}{3});\sin(\theta-\frac{2\pi}{3})\right)$

1. عين إحداثيي النقطة G مرجح النقط (A;-1) ، (B;2) و (C;2)

2. عين النقطة H من المستوي بحيث : $2\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AO}$

3. عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $2MB^2+2MC^2-MA^2=3$

(يمكنك إثبات أن O نقطة من المجموعة)

الهدية

المفاتيح العشرة للنجاح الدراسي

2/- العطاء يساوي الأخذ:

النجاح عمل وجد وتضحية وصبر ومن منح طموحه صبراً وعملاً وجدا حصد نجاحاً وثماراً ..فاعمل واجتهد وابذل الجهد لتحقق النجاح والطموح والهدف ..فمن جدّ وجد ومن زرع حصد.. وكل من جد في أمر يحاوله واستعمل الصبر إلا فاز بالظفر .. **يتبع**

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

سلسلة استعد للبكالوريا رقم (04)

السنة الدراسية :2009/2008

المستوى : ثالثة ثانوي

الشعبـــــة : علوم تجريبية + رياضيات

و تقني رياضي

إعداد الأستاذ
خليلات عمار

المحور : الجداء السلمي في الفضاء والمستقيمات والمستويات وتطبيقاته

التمارين من 1 إلى 3 مراجعات الهندسة المستوية

التمرين (01) : ينسب المستوى إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. لتكن النقط :

$A(1;3)$ ، $B(3;0)$ و $C(-5;-1)$

1. أثبت أن المثلث ABC قائم .
2. عيّن معادلة للدائرة المحاطة بالمثلث ABC. 3 .عيّن معادلة لمماس هذه الدائرة في A.

التمرين (02) :ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

نعتبر النقطتين $A(1;2)$ و $B(0;5)$ والدائرة (C) التي معادلتها : $x^2+y^2-2x-3=0$

1.عيّن التمثيل الوسيطي ومعادلة ديكارتية للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة$(-1;1)$ وشعاع توجيه له $\vec{u}(2;1)$.

2. حدد مركز ونصف قطر الدائرة (C) و تأكد أن $A\in(C)$.

3. أ)حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) المار من B و $\vec{n}(3;4)$ شعاع ناظمي له.

ب) بيّن أن تقاطع (C) و (Δ) مجموعة خالية

4.تأكد أن (D) و(C) يتقاطعان وحدد تقاطعهما.

5.احسب المسافة بين مركز الدائرة (C) والمستقيم (D) بطريقتين.

التمرين (03) ABC مثلث قائم في A حيث AB=3 و AC=4

ليكن G مرجح $(A;1)$ ، $(B;-2)$ و $(C;3)$

I) أ) أنشئ النقطة G واحسب: GA^2 ، GB^2 و GC^2 .

ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $MA^2-2MB^2+3MC^2=k$ $(k\in R)$

II) ينسب المستوي إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(A;\vec{i};\vec{j}\right)$ **حيث** : $\vec{i}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ و $\vec{j}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

أ) عيّن إحداثيات النقطة G واحسب: GA^2 ، GB^2 و GC^2.

ب)عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $MA^2-2MB^2+3MC^2=k$ $(k\in R)$

Descartes dit dans sa géométrie(1637):la géométrie analytique est l'art de résoudre les problèmes de géométrie par le calcul.

التمرين (04) $ABCDEFGH$ مكعب ضلعه a . 1/ احسب الجداءات السلمية الآتية :

أ) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، ب) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ ، ج) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FG}$ ، د) $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{HF}$

2/ أثبت ان المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BED)

3/ نعتبر المعلم $\left(D;\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DH}\right)$.أ) عيّن إحداثيات النقط A ، G ، B ، E و D

ب) اثبت مجددا أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BED)

التمرين (05) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء.

نعتبر النقط : $A(-1;1;1)$ ، $B(0;0;-1)$ و $C(3;-2;1)$

1) بيّن أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا

2) عيّن شعاع ناظمي $\vec{n}$ للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3) أوجد معادلة لسطح الكرة (S) التي قطرها $[AC]$

التمرين (06) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء محاوره (OX) ، (OY) ، (OZ)

نعتبر النقطة $A(1;-2;4)$ و المستوي (P) الذي معادلته : $2x-3y+z+2=0$

1. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة **A** ويعامد المستوي (P) .
2. عيّن إحداثيات النقطة B نقطة تقاطع (Δ) و (P) .
3. اكتب معادلة لسطح الكرة التي مركزها **A** والتي تمس المستوي (P) .
4. عيّن إحداثيات C; D نقطتي تقاطع سطح الكرة والمستقيم (OZ)
5. ما هي إحداثيات مركز ثقل رباعي الوجوه ABCD .

التمرين (07) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء.

تعطى النقط : $A(1;0;2)$، $B(0;2;1)$ ، $C(2;1;0)$ ، $D(2;4;3)$

1.برهن أن الشعاع $\vec{V}(1;1;1)$ عمودي على المستوي (ABC) .

2.استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3.تحقق أن الرباعي ABCD هو رباعي وجوه. ثم احسب حجم المجسم الرباعي ABCD.

التمرين (08) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء . تعطى النقط : $A(2;4;1)$

$B(0;4;-3)$ ، $C(3;1;-3)$ ، $D(1;0;-2)$ ، $E(3;2;-1)$ ، $I\left(\frac{3}{5};4;-\frac{9}{5}\right)$

بيّن – مع التعليل – صحة أو خطأ الجمل التالية : 1) المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان

2) معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي : $2x+2y-z-11=0$

3) النقطة E المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

4) المستقيم (CD) ممثل وسيطيا بالجملة : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=1-t \end{cases}$

5) النقطة I تنتمي للمستقيم (AB) .

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

التمرين (09) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء .نعتبر المستوي(P) وسطح الكرة (S) المعرفين على التوالي بالمعادلتين الديكارتيتين :

$(P): x-2y+2z-2=0$ ، $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$

1. حدد مركز ونصف قطر سطح الكرة (S).
2. بيّن أن المستوي (P) مماس لسطح الكرة (S).
3. حدد نقطة تماس المستوي (P) وسطح الكرة (S).

التمرين (10) في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ من الفضاء. تعطى النقط :

$A(-1;2;1)$ ، $B(0;5;2)$ ، $C(3;0;-2)$

1. أ) بيّن أن النقـــــط A، B وC تعيّن مستويا.
ب) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
2. نعتبر سطح الكرة (S) المعرفة بالمعادلة الديكارتية :

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+8=0$$

أ) عيّن النقطة Ω مركز سطح الكرة (S) ونصف قطرها r

ب) تحقق من أن المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S) .

3. أ) أوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على المستوي (ABC).
ب) استنتج إحداثيات ω نقطة تماس (ABC) و (S) .

التمرين (11) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء. نعتبر المستويين المعرفين بالمعادلتين التاليتين : $(P): x+2y-z+1=0$ و $(P'): -x+y+z=0$ و النقطة A(0; 1 ; 1)

1. بيّن أن المستويين متعامدان
2. عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) تقاطع المستويين (P) و (P')
3. عيّن بعد النقطة A عن المستوي (P) و عن (P')
4. استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (d)

التمرين (12) نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط :

$A(1;2;-2)$ ، $B(0;3;-3)$ ، $C(1;1;-2)$ و المستوي (P) الذي معادلته : $x+y-3=0$

1) أ- احسب مسافة النقطة $\Omega(0;1;-1)$ عن المستوي (P) .

ب- استنتج أن معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها $\Omega(0;1;-1)$ و المماسة للمستوي (P) هي : $x^2+y^2+z^2-2y+2z=0$

2) أ- بيّن أن النقـــــط A، B وCتعيّن مستويا.

ب- عيّن شعاع ناظمي $\vec{n}$ للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3) أ-تحقق من أن سطح الكرة (S) مماسة للمستوي (ABC).

ب- احسب المسافة ΩC واستنتج نقطة تماس (S) و المستوي (ABC) .

التمرين (13) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء.نعتبر النقطة $A(2;0;2)$

والمستوي (P) ذا المعادلة : $x+y-z-3=0$

1. حدد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D)المار من A والعمودي على المستوي (P).
2. حدد إحداثيات B نقطة تقاطع المستقيم (D) والمستوي (P).
3. نعتبر سطح الكرة (S) التي مركزها A والتي تقطع المستوي (P) وفق الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها 2.

أ- حدد نصف قطر سطح الكرة (S)

ب- اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S).

التمرين (14) الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

النقطة $A(1;-1;3)$ والمستوي (P) الذي معادلته : $x-y+3z=0$

1.أ) تحقق من أن : $(t\in R)$ $\begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=3t \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (OA) .

ب) حدد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) العمودي على المستقيم في النقطة A

ج) تحقق من أن (P) يوازي المستوي (Q) .

2. نعتبر سطح الكرة (S) المماسة للمستوي (Q) في A والتي يقطعها المستوي (P) وفق الدائرة Γ التي مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{33}$.

أ) بيّن أن $\Omega(a;b;c)$ مركز سطح الكرة (S) ينتمي إلى (OA) ثم استنتج أن : $c=3a$ و$b=-a$

ب) بيّن أن : $\Omega A^2 - \Omega O^2 = 33$ ثم استنتج أن : $a-b+3c=-11$

ج) استنتج إحداثيات Ω مركز سطح الكرة (S) وبيّن أن نصف قطرها يساوي $2\sqrt{11}$.

التمرين (15) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء. تعطى النقط :

$C(2;1;-2)$ ، $B(1;-1;1)$ ، $A(1;2;-2)$

1. بيّن أن النقـــــط A، B وC تعيّن مستويا ثم اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2.لتكن (S) سطح الكرة التي مركزها $\Omega(1,1,1)$ ونصف قطرها $R=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

أ- بيّن أن المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S) ثم حدد إحداثيات H نقطة تماس (ABC) و(S)

ب- لتكن $M(a,b,c)$ نقطة من المستوي (ABC) .بيّن أن : $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$

التمرين (16) A، B، C ثلاث نقط من الفضاء حيث ABC مثلث قائم في C و متساوي الساقين .(P) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق: $\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

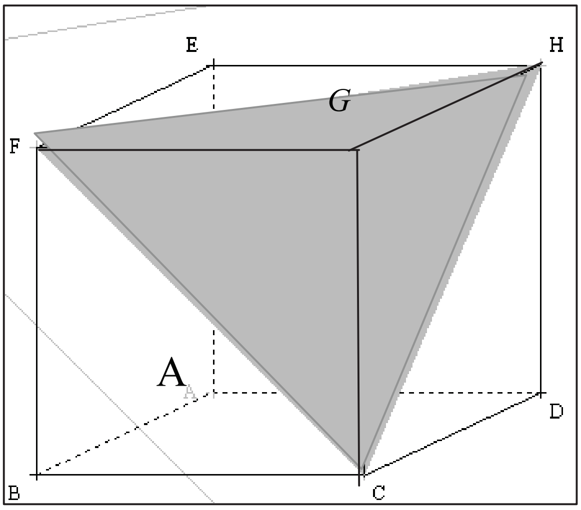
تحقق أن (P) مستو عمودي على المستوي (ABC) يطلب تعيين تقاطعه معه.

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

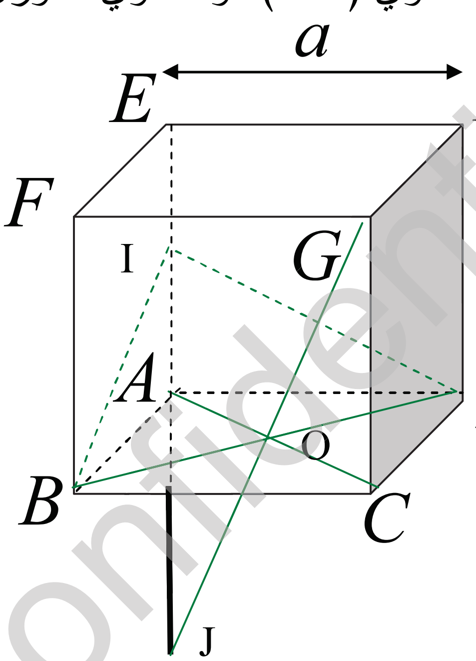
التمرين (17) نعتبر المكعب ABCDEFGH .

1. بين أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (CFH).(الشكل 1)
2. أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HC}$.(الشكل 2)
3. نعتبر النقطة I منتصف الحرف [AE] والنقطة J بحيث تكون النقطة A منتصف القطعة[EJ]

– أثبت أن المستوي (BDI) هو مستوي محوري للقطعة [GJ] . (الشكل 2)



(الشكل 1)



(الشكل 2)

التمرين (18) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء . تعطى النقط

$D(0;4;-1)$ ، $C(6;-2;-1)$ ، $B(6;1;5)$ ، $A(3;-2;2)$

بيّن – مع التعليل – صحة أو خطأ الجمل التالية :

1)المثلث ABC قائم في A

2)المستوي (P) ذو المعادلة : $x+y+z-3=0$ عمودي على المستقيم (AB) ويشمل النقطة A

3) معادلة المستوي (P') العمودي على (AC) والذي يشمل النقطة A هي : $x+z-5=0$

4) المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

5) الشعاع $\vec{u}(1;-2;1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ) تقاطع (P) و (P').

6) حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو 81 وحدة حجوم . 7) قيس الزاوية $\widehat{BDC}$ هو $\frac{3\pi}{4}$ راديان

8) مساحة المثلث BDC هي 21 وحدة مساحة . 9) بعد A عن المستوي (BDC) يساوي 3

التمرين (19) ABCD رباعي وجوه منتظم ، بين أن (P) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق: $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right)=0$ هي مستو موازٍ للمستقيمين (AB) و (CD) و يمر من G مركز ثقل الرباعي ABCD

– عين تقاطعات (P) مع وجوه الرباعي (أثر(P)) .

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (20) منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط التالية A(4 ; 0 ; -3) ، B(2 ; 2 ; 2) ، C(3 ;-3 ;-1) و D(0 ; 0 ; -3) .

1) عين معادلة ديكارتية لمستوي محور [AB] (ليكن (P) هذا المستوي) .

2) نقبل فيما يلي أن المستويين محوري القطعتين

[BC] و [DC] معرفان بالمعادلتين 2x-10y-6z-7=0 و 3x-3y+2z-5=0 على الترتيب .

أ)– بين أن تقاطع هذه المستويات الثلاثة هو نقطة E يطلب تعيين إحداثياتها .

ب)– بين أن النقط A ، B ، C ، D تقع على سطح كرة مركزها E يطلب تعيين نصف قطرها

التمرين (21) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر المستقيمات d_1 ، d_2 ، d_3 ممثلة وسيطيا على الترتيب

$$d_1 : \begin{cases} x = -2+5t \\ y = -1-t \\ z = 3+4t \end{cases} \quad (t\in R) \quad ، \quad d_2 : \begin{cases} x = 1-t' \\ y = 4+3t' \\ z = 5-t' \end{cases} \quad (t'\in R) \quad ، \quad d_3 : \begin{cases} x = -7+7t'' \\ y = -3t'' \\ z = 2t'' \end{cases} \quad (t\in R)$$

– أدرس تقاطع d_1 و d_2 ثم d_1 و d_3

التمرين (22) نعتبر المستويين المعرفين بمعادلتين ديكارتين كما يلي :

$$(P):x+y=-1 \quad ، \quad (R):2x+y+2z=0$$

1) تحقق أن المستويين يتقاطعان وفق مستقيم (D) يشمل النقطة A(1 ; -2 ; 0) و موجه بالشعاع $\vec{u}(-2;2;1)$

2) بين أن المستقيم (D) و المستوي (P') الذي معادلته 4 x + 4 y + z + 3 = 0 يتقاطعان

3) استنتج حل الجملة

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+y+2z=0 \\ 4x+4y+z+3=0 \end{cases}$$

التمرين (23) نعتبر في الفضاء (E) المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط :

$A(0;-1;2)$ ، $B(1;1;2)$ ، $C(2;-1;0)$ و المستوي : $(P):-2x+y+2z+2=0$

و سطح الكرة : $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$

1) أوجد المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) .

2) حدد النقطة Ω مركز سطح الكرة (S) و نصف قطرها R

3) برهن أن المستوي (ABC) مماس لسطح الكرة (S) في نقطة E ينبغي تحديد إحداثياتها.

4) بيّن أن المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة (C) محددا إحداثيات مركزها H ونصف قطرها r

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (24) ABC مثلث ، نضع AB = c ، BC = a ، AC = b نعتبر A' مرجح الجملة $\{(B;b);(C;c)\}$

1) نعرف النقطة B' بـــ : $\overrightarrow{AB'}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}$

بين أن B' مرجح النقطتين A و B مرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما .

2) لتكن C' مرجح الجملة $\{(A;b);(C;c)\}$ ، بين أن $AB'A'C'$ معين .

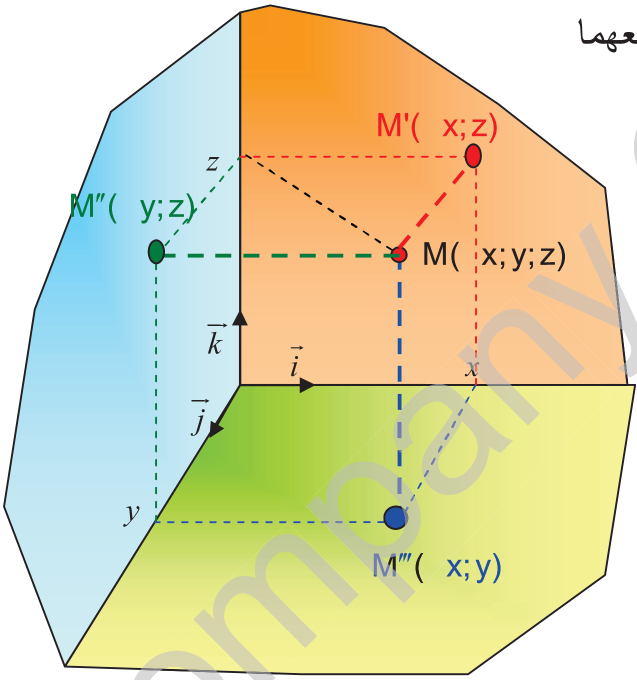
3) لتكن I مرجح الجملة $\{(A;a);(B;b);(C;c)\}$ ، بين أن I هو مركز الدائرة الداخلية للمثلث ABC.

التمرين (25) : الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط التالية : A(1 ; 2 ; 3) ، B(3 ; 2 ; 1) و C(1 ; 3 ; 3)

1) بين أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا ، أكتب معادلة ديكارتية له .

2) نعتبر المستويين (P_1) ، (P_2) حيث : $(P_1):x-2y+2z-1=0$ و $(P_2):x-3y+2z+2=0$



a) بين أن (P_1) ، (P_2) يتقاطعان و ليكن (Δ) تقاطعهما

b) تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ)

c) أثبت أن الشعاع $\vec{u}(2;0;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

d) استنتج تمثيلا وسيطيا لــ (Δ)

2) لحساب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) الممثلة وسيطيا بالجملة

$$\begin{cases} x=2k+1 \\ y=3 \\ z=-k+3 \end{cases} \quad \text{مع} \quad t\in R$$

نعتبر النقطة M ذات الوسيط k من المستقيم (Δ)

a) عين قيمة k حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين

b) استنتج بعد النقطة A عن المستقيم (Δ)

3) . أ) من أجل كل عدد حقيقي t ، نعتبر النقطة $M_t(2t+1;3;-t+3)$.

– عيّن بدلالة t الطول AM_t. ونرمز لهذا الطول بـــ $\varphi(t)$. ونعرف الدالة φ من R في R.

ب) ادرس إتجاه تغير الدالة φ و استنتج القيمة الحدية الصغرى لها .

جـــ) فسّر هندسيا هذه القيمة الحدية الصغرى.

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

{ التدريب على حل تمارين بكالوريات }

التمرين (01): الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر المستوي (P) الذي معادلته: $x+2y-z+7=0$ و النقط $A(2;0;1)$ ، $B(3;2;0)$ و $C(-1;-2;2)$

1- تحقق أن النقط A ، B و C ليست على استقامية ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي هي: $y+2z-2=0$

2- أ- تحقق ان المستويين (P) و (ABC) متعامدان ، ثم عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC)

ب- احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ)

3- لتكن G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;\alpha),(C;\beta)\}$ حيث α و β عددان حقيقيان يحققان $1+\alpha+\beta\neq0$ ، عيّن α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ)

التمرين (02) لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط . عيّن الجواب الصحيح معللا اختيارك .نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط :

$A(1;3;-1)$ ، $B(4;1;0)$ ، $C(-2;0;-2)$ ، $D(3;2;1)$

و المستوي (P) الذي معادلته : $x-3z-4=0$.

1) المستوي (P) هو : ج1) (BCD) ، ج2) (ABC) ، ج3) (ABD)

2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو :

ج1) $\vec{n_1}(1;2;1)$ ، ج2) $\vec{n_2}(-2;0;6)$ ، ج3) $\vec{n_3}(2;0;-1)$

المسافة بين النقطة D و المستوي (P) هي: ج1) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ، ج2) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ، ج3) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

التمرين (03) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

لتكن النقط $A(0;2;1)$ ، $B(-1;1;-3)$ ، $C(1;0;-1)$

1.اكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة S التي مركزها C وتشمل النقطة A

2.ليكن المستقيم (D) المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-3+2\lambda \end{cases}$ حيث λ عدد حقيقي .

أ) اكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل النقطة C و يعامد المستقيم (D)

ب) احسب المسافة بين النقطة C و المستقيم (D)

ج) ماذا تستنتج فيما يتعلق بالوضع النسبي لكل من المستقيم (D) وسطح الكرة S

التمرين (04) نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفيين بالتمثيلين الوسيطيين الأتيين :

$$\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+\frac{1}{2}\lambda \\ z=-2-2\lambda \end{cases} ;\lambda\in\mathbb{R} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x=6+\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=5+\alpha \end{cases} ;\alpha\in\mathbb{R}$$

على الترتيب

1- بيّن أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.

2- M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (Δ')

أ) عيّن إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (Δ') .

أ) احسب الطول MN .

3-عيّن معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ') .

4-احسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P) . ماذا تلاحظ ؟

التمرين (05) نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

$A(1;2;2)$ ، $B(3;2;1)$ ، $C(1;3;3)$ نقط من هذا الفضاء.

1/ برهن أن النقط A ، B و C تعين مستو يطلب تعيين معادلته الديكارتية .

2/ نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) المعرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$(P_1):x-2y+2z-1=0$ و $(P_2):x-3y+2z+2=0$

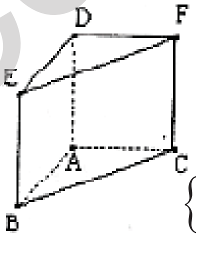
بيّن أن (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) .

3/ بيّن أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

4/ بيّن أن الشعاع $\vec{u}(2;0;-1)$ هو احد أشعة توجيه المستقيم (Δ).

5/ استنتج أن التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو الجملة : $(k\in\mathbb{R})$; $\begin{cases} x=2k+1 \\ y=3 \\ z=-k+3 \end{cases}$

التمرين (06) $ABCDEF$ موشور قائم قاعدته المثلث ABC القائم في A و المتساوي الساقين وجهاه $ABED$ و $ACFD$ مربعان متقايسان طول ضلع كل منهما r حيث $(r\in\mathbb{R}_+^*)$. (انظر الشكل)



1) يرمز I إلى منتصف $[AD]$ و J إلى مركز ثقل الرباعي $BCFE$.

بيّن أن G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1),(C;1),(D;2),(E;1),(F;1)\}$ هو منتصف $[IJ]$.

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

2) ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$.

– عيّن إحداثيات النقط A ، B ، C ، D ، E ، F

– عيّن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$2MA^2+MB^2+MC^2+2MD^2+ME^2+MF^2=10r^2$$

التمرين (07) نعتبر في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، النقطتين $A(0;-1;1)$ و $B(1;-1;0)$ وسطح الكرة (S) التي معادلتها

$$x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$$

1) بيّن أن مركز سطح الكرة (S) هي النقطة $\Omega(1;0;2)$ ونصف قطرها هو $\sqrt{3}$

2) تحقق من أن A تنتمي إلى (S)

3)تحقق أن النقط A ، B و O ليست على استقامية ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (OAB) هي : $x+y+z=0$

4) بيّن أن المستوي (OAB) مماس لسطح الكرة (S) في النقطة A.

التمرين (08) (أسئلة متعددة الاختيارات)

في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء. عيّن، في كل حالة مما يلي، النتيجة أو النتائج الصحيحة مع التبرير.

1/ المستقيم الذي يشمل $A(1;2;-4)$ و $B(-3;4;1)$ و المستقيم الذي تمثيله الوسيطي معرف بـــ:

$$\begin{cases} x=-11-4t \\ y=8+2t \\ z=11+5t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

□ متقاطعان □ متوازيان تماما □ متطابقان □ ليسا من مستوي واحد

2/ ليكن المستوي (P) المعرف بالمعادلة : $2x+3y-z+4=0$ والمستقيم (d) المعرف بـــ:

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=8+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$$

□ (P) و (d) متقاطعان □ (P) و (d) متوازيان تماما

□ (d) محتواه في (P) □ لآ احد من هذه الإمكانيات صحيحة

3/ المسافة بين النقطة $A(1;2;-4)$ والمستوي المعرف بالمعادلة : $2x+3y-z+4=0$

□ $\frac{8\sqrt{14}}{7}$ □ 16 □ $8\sqrt{14}$ □ $\frac{8}{7}$

4/ لتكن النقطة $B(-3;4;1)$ وسطح الكرة (S) المعرف بالمعادلة : $x^2+y^2+z^2=16$

□ B داخل (S) □ B خارج (S) □ B نقطة من (S) □ لا نعرف

التمرين (09) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء .تعطى النقطتين A(3; 0 ; 6) و I(0; 0 ; 6) وليكن (D) المستقيم الذي يشمل النقطتين A وI نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بالمعادلتين التاليتين : $(P): 2y + z - 6 = 0$ و $(Q): y - 2z + 12 = 0$

1.بيّن أن المستويين (P) و (Q) متعامدان

2.بيّن أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D)

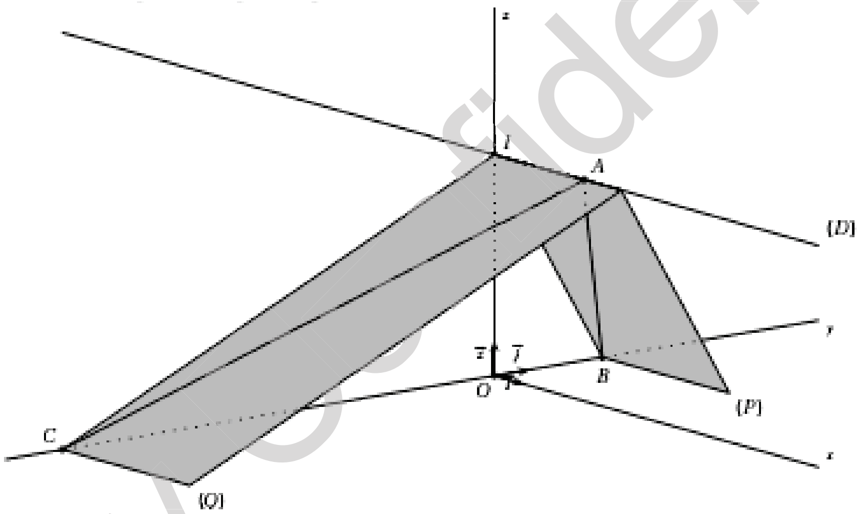
3.بيّن أن المستويين (P) و (Q) يقطعان ، على الترتيب ،المحور $(O;\vec{j})$ في النقطتين B و C

4. اثبت أن معادلة للمستوي (T) يشمل النقطة B والشعاع $\overrightarrow{AC}$ ناظمي له هي :

$$x + 4y + 2z - 12 = 0$$

5. أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (OA) .برهن أن المستقيم (OA) والمستوي (T) يتقاطعان في نقطة H يطلب تعيين إحداثياتها.

6.ماذا تمثل النقطة H بالنسبة للمثلث ABC ؟ علل جوابك.



التمرين (10) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء.نعتبر المستوي (P) ذو المعادلة : $2x + y - 2z + 4 = 0$ و النقط : A(3; 2 ; 6) ، B(1; 2 ; 4) ، C(4; -2 ; 5)

1.أ) بيّن أن النقـــط A، B و C تعيّن مستويا .ب- بيّن أن هذا المستوي هو المستوي (P) .

2. أ) بيّن أن المثلث ABC قائم

ب) Δ مستقيم يشمل O ويعامد المستوي (P) ، أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم Δ

جـ) K المسقط العمودي للنقطة O على (P) . احسب OK

د) احسب حجم الرباعي OABC

3. نعتبر الجملة المثقلة : $S=\left\{ (O;3),(A;1),(B;1),(C;1) \right\}$

أ) بيّن أن هذه الجملة تقبل مرجحا

ب) نرمز بـــ I إلى مركز ثقل المثلث ABC . بيّن أن G تنتمي إلى المستقيم (OI) .

جـــ) عيّن المسافة بين G والمستوي (P)

4. أ) عيّن (E) مجموعة M من الفضاء التي تحقق : $\left\| 3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 5$

ب) ما هي مجموعة النقط المشتركة بين (P) و(E) .

التمرين (11) في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ من الفضاء .تعطى النقط :

$A(2;1;3)$ ، $B(-3;-1;7)$ ، $C(3;2;4)$

1.أثبت أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة.

2. ليكن (d) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي : $(t \in R)$ $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$

أ) بيّن أن المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC) .

ب) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3. لتكن H النقطة المشتركة للمستقيم (d) والمستوي (ABC).

أ) بيّن أن النقطة H مرجح الجملة $\{(A;-2),(B;-1),(C;2)\}$

ب)عيّن طبيعة المجموعة (Γ_1) للنقط M من الفضاء والتي تحقق :

$$\left(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 0$$

وحدد العناصر المميزة

جـ) عيّن طبيعة المجموعة (Γ_2) للنقط M من الفضاء والتي تحقق :

$$\left\|-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \sqrt{29}$$

وحدد العناصر المميزة

د) عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$.

هـ) هل النقطة $S(-8;1;3)$ تنتمي للمجموعة $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$.

التمرين (12) الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1. نعتبر المستوي (P) الذي يشمل النقطة $B(1;-2;1)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له.والمستوي (R) المعرف بالمعادلة الديكارتية : $x + 2y - 7 = 0$.

أ- بيّن أن المستويين (P) و(R) متعامدان.

ب- برهن أن تقاطع المستويين (P) و(R) هو المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $C(-1;4;-1)$ وشعاع توجيه له . $\vec{u}(2;-1;1)$

جـ) لتكن النقطة $A(5;-2;-1)$. احسب بعد النقطة A عن المستوي (P) ثم بعد النقطة A عن المستوي (R) .

د) عيّن بعد النقطة A عن المستقيم (Δ).

2. أ) من أجل كل عدد حقيقي t ، نعتبر النقطة $M_t(1+2t;3-t;t)$.

– عيّن بدلالة t الطول AM_t .ونرمز لهذا الطول بـــ $\varphi(t)$.ونعرف الدالة φ من R في R.

ب) ادرس إتجاه تغير الدالة φ واستنتج القيمة الحدية الصغرى لها .

جـ) فسّر هندسيا هذه القيمة الحدية الصغرى.

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (13) : A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء ، ليست على استقامة واحدة . k عدد حقيقي من المجال [1- ; 1] . G_k مرجح الجملة $\{(A;k^2+1),(B;k);(C;-k)\}$.

1) مثّل النقط A ، B ، C و I منتصف [BC] ثم أنشئ النقطتين G_1 و G_2

2) a) بين أنه من أجل كل k من المجال [1- ; 1] لدينا : $\overrightarrow{AG_k} = \dfrac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$

b) شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على المجال [1- ; 1] كما يلي : $f(x) = \dfrac{-x}{x^2+1}$

c) استنتج مجموعة النقط G_k لما k يمسح المجال [1- ; 1]

3) عين (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

4) عين (F) مجموعة النقط M من الفضاء حيث :

$$\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

5) الفضاء منسوب الآن إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، النقط A ، B ، C تأخذ الإحداثيات (2 ; 0 ; 0) ، (1 ; 2 ; 1-) و (5 ; 2 ; 1-) على الترتيب.

a) عين إحداثيات G_1 و G_2 ، تحقق أن (E) و (F) يتقاطعان.

b) أحسب نصف قطر الدائرة (C) تقاطع (E) و (F) .

التمرين (14) **(أسئلة متعددة الاختيارات)** كل سؤال يتضمن أربع اختيارات من بينها اختيار واحد صحيح ، عيّنه مبررا إجابتك . الفضاء منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ بحيث : $\begin{cases}2x-6y+2z-7=0\\-x+3y-z+5=0\end{cases}$ هي :

ج1:مجموعة خالية ، ج2) مستقيم ، ج3) مستوي ، ج4) نقطة

2) المستقيمان الممثلان وسيطيا كما يلي : $\begin{cases}x=1-t\\y=-1+t\quad(t\in\mathbb{R})\\z=2-3t\end{cases}$ و $\begin{cases}x=2+t\\y=-2-t\;(t\in\mathbb{R})\\z=4+2t\end{cases}$

ج1: متوازيان تماما ، ج2: متطابقان ، ج3: متقاطعان ، ج4) :ليسا من مستوي واحد

3) المسافة بين النقطة $A(1;-2;1)$ والمستوي الذي معادلته : $-x+3y-z+5=0$ هي :

ج1: $\dfrac{3}{11}$ ، ج2) : $\dfrac{3}{\sqrt{11}}$ ، ج3: $\dfrac{1}{2}$ ، ج4: $\dfrac{8}{\sqrt{11}}$

4) إحداثيات H المسقط العمودي للنقطة $B(1;6;0)$ على المستوي الذي معـــــــادلته: $-x+3y-z+5=0$ هي :

ج1: $(3;1;5)$ ، ج2: $(2;3;1)$ ، ج3: $(3;0;2)$ ، ج4: $(-2;3;-6)$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (15) نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط:

$A(2;1;-1)$, $B(-1;2;4)$,$C(0;-2;3)$,$D(1;1;-2)$ و المستوي (P)

الذي معادلته: $x-2y+z+1=0$

– في كل اقتراح مما يلي أذكر إن كانت الجملة صحيحة ام خاطئة مبررا ذلك .

1) النقط A ، B و C تعين مستوي ، 2) المستقيم (AC) محتوى في المستوي (P)

3) معادلة ديكارتية للمستوي (ABD) هي : $x+8y-z-11=0$

4) المستقيم (AC) له تمثيل وسيطي الجملة التالية : $(k\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=2k \\ y=2+3k \\ z=3-4k \end{cases}$

5) المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان ، 6) بعد النقطة C عن المستوي (P) يساوي $4\sqrt{6}$

7) سطح الكرة التي مركزها D ونصف قطرها $\frac{\sqrt{6}}{3}$ مماسة للمستوي (P)

8) النقطة $E\left(-\frac{4}{3};\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$ المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P)

التمرين (16) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبرالنقط $A(1;1;0)$ ،

$B(1;2;1)$ و $C(3;-1;2)$

1–تحقق أن النقط A ، B و C ليست على استقامية ثم بين أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $2x+y-z-3=0$

2–نعتبر المستويين (P) و (R) المعرفيين على الترتيب بالمعادلتين :

$x+2y-z-4=0$ و $2x+3y-2z-5=0$

– بيّن أن المستويين يتقاطعان وفق مستقيم $(\mathfrak{D})$ تمثيله الوسيطي هو : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$

3–ادرس تقاطع المستويات (P)، (R) و (ABC)

4– عيّن بعد النقطة A عن المستقيم $(\mathfrak{D})$.

التمرين (17) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ نعتبر النقط:

$A(1;2;3)$، $B(0;1;4)$ ، $C(-1;-3;2)$ ، $D(4;-2;5)$ و الشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$.

1. أ) أثبت أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة.

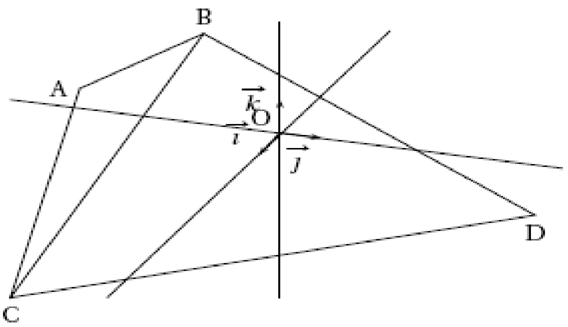
ب) بيّن أن $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

ج) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2. (Δ) مستقيم معرف بالتمثيل الوسيطي : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+t \\ z=4-t \end{cases}$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

– برهن أن النقطة D تنتمي للمستقيم (Δ) و أن هذا المستقيم عمودي على المستوي (ABC).
3. لتكن النقطة E المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)
–برهن أن النقطة E مركز ثقل المثلث ABC .



التمرين (18) الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.نعتبر النقط A(3 ; -2 ; 2) ، B(6 ; 1 ; 5) ، C(6 ; -2 ; - 1)

I) 1) بين أن المثلث ABC قائم .
2) ليكن (P) المستوي الذي معادلته :
$x+y+z-3=0$. بين أن (P) عمودي على المستقيم (AB) و يمر من النقطة A .
3) ليكن (P') المستوي العمودي على المستقيم (AC) و الذي يشمل A .
– أكتب معادلة ديكارتية لـــ (P')
4) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) مستقيم تقاطع (P) و (P') .

II) 1) لتكن D النقطة ذات الاحداثيات $(0;4;-1)$، بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)
2) أحسب حجم رباعي الوجوه ABDC
3) بين أن قيس الزاوية $B\widehat{D}A$ هو $\frac{\pi}{4}$ راديان
4) أ) أحسب مساحة المثلث BDC
ب) استنتج بعد النقطة A عن المستوي (BDC)

التمرين (19) نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقط:
$A(0;0;2)$ ، $B(0;4;0)$ ، $C(2;0;0)$ و نسمي I منتصف القطعة $[BC]$ و G مركز المسافات المتساوية للنقط A ، B و C و النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) .

– في كل اقتراح مما يلي أذكر إن كانت الجملة صحيحة ام خاطئة مبرهنا عن اختيارك .

°1) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$ هي المستوي (AIO).

°2) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$ هي سطح الكرة التي قطرها $[BC]$.

°3) حجم رباعي الوجوه $OABC$ يساوي 4 وحدة حجوم .

°4) $2x+y+2z=4$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) وإحداثيات النقطة H هي $\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$

°5) المستقيم (AG) يقبل التمثيل الوسيطي : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=2-2t \end{cases}$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (20) $ABCD$ رباعي وجوه بحيث المثلثات ABC ، ABD و ACD قائمة في A ومتساوية الساقين بحيث : $AB = AC = AD = a$. نسمي A_1 مركز ثقل المثلث BCD .

1) برهن أن المستقيم (AA_1) يعامد المستوي (BCD) . (يمكنك حساب $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AA_1}.\overrightarrow{BC}$)

2) عبر بطريقتين مختلفتين عن حجم رباعي الوجوه $ABCD$ ، احسب طول القطعة $[AA_1]$.

3) نسمي النقطة G مركز المسافات المتساوية لرباعي الوجوه $ABCD$ و I منتصف $[BC]$.

أ) برهن أن النقطة G تنتمي للقطعة $[AA_1]$ و احسب الطول AG .

ب) عيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث يكون :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

4) النقطة H نظيرة النقطة A بالنسبة للنقطة G

أ) برهن أن : $4\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}$.

ب) برهن المساواة : $HC^2 - HD^2 = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BA}$ ثم استنتج أن $HC = HD$

التمرين (21) نعتبر رباعي الوجوه OABC حيث OAB، OAC و OBC مثلثات قائمة في O و OC=OB=OA=1، [CI] إرتفاع في المثلث ABC، [OH] إرتفاع في المثلث OIC .

1− ما طبيعة المثلث ABC؟ أحسب الطول AB.

2− أثبت أن المستقيمان (OH)و(AB) متعامدان و أن H ملتقى الارتفعات في المثلث ABC .

3− أرسم المثلث OCI بعد حساب الأطوال OIو CI (الوحدة هي طول OC) ، عين .H

4. أ). عين الطول OH في المثلث OCI.

ب). أحسب V حجم رباعي الوجوه OABC ثم S مساحة ABC .

ج) أوجد علاقة بين V،Sو OH ثم تحقق من النتيجة 4−أ).

5.نعتبر النقطة D المعرفة بالعلاقة $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{HO}$ ثم ننسب الفضاء إلى المعلم $\left(O;\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right)$

أ). بين أن إحداثيات النقطة H هي $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. ب). بين أن رباعي الوجوه ABCD منتظم.

ج). لتكن Ω مركز سطح الكرة الداخلية للرباعي ABCD

بين أن Ω نقطة من المستقيم (OH) وأحسب إحداثياتها.

الهدية

بطاقة تعزية ورثاء لحال الأمة

الى كل الشهداء الذين ضمخوا بدمائهم أرض الإسراء والمعراج أقول لهم ما قاله رب العزة(سلام عليكم بما صبرتم فنعم عقبى الدار) صدق الله العظيم ، والخاسرون الحقيقيون هم الذين تقاعسوا وقعدوا عن نصرة إخوانهم في فلسطين الجريحة وبغداد الأسيرة ،(ولا تحسبن الله غافلا عما يعمل الظالمون) صدق الله العظيم .

سلسلة استعد للبكالوريا رقم (05)

المستوى : ثالثة ثانوي — السنة الدراسية :2008/2007

الشعبـــــة :علوم تجريبية + رياضيات و تقني رياضي

إعداد الأستاذ حليلات عمار

المحور: الأعداد المركبة

تمرين مدخل للأعداد المركبة : مثال بومبيلي(Bombelli).

الهدف من هذا النشاط هو حل المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $x^3=15x+4$ ..... (1) .

1) أثبت أن $\alpha+\beta$ حل للمعادلة (1) إذاوفقط إذا: $\alpha^3+\beta^3+3(\alpha\beta-5)(\alpha+\beta)-4=0$ .... (2) .

2) ما هي القيمة التي يجب إعطاؤها للعدد $\alpha\beta$ حتى تكتب المعادلة (2) على الشكل $\alpha^3+\beta^3=4$ ؟
ما هي قيمة $\alpha^3\beta^3$ في هذه الحالة ؟

3) تأكد أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $\left(x-\alpha^3\right)\left(x-\beta^3\right)=x^2-4x+125$.

4) نعتبر المعادلة $x^2-4x+125=0$ . . . (3) تأكد أن هذه المعادلة لا تقبل حلولا حقيقية .

5) **نتخيل عدد نرمز له** " i " **حيث** $i^2=-1$.
أكتب حلول المعادلة (3) في هذه الحالة .
أحسب $(2-i)^3$ و $(2+i)^3$ ، استنتج حلا حقيقيا للمعادلة (1). ثم عين حلول المعادلة (1).

الجزء الأول : العمليات على الشكل الجبري

التمرين (01) اكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها الجبري :

$z_1=(2+i)^2$ ، $z_2=(4+2i)(4-2i)$ ، $z_3=(2-i)^2(1+2i)^2$ ، $z_4=(3-2i)^3$

$z_5=\left(\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ، $z_6=\dfrac{4-6i}{3+2i}$ ، $z_7=\dfrac{1+i}{3-i\sqrt{2}}$ ، $z_8=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{4n}$ ، $z_9=\dfrac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}$

التمرين (02) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

1/ $3z-2+i=(1+i)z-1-2i$ ، 2/ $(3-4i)z^2=iz$ ، 3/ $\dfrac{z+1}{z-1}=2i$

التمرين (03) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات ذات المجهول z التالية :

1/ $z^2+z\bar{z}-4-6i=0$ ، 2/ $(1+i)z-(2-i)\bar{z}+3+4i=0$

3/ $\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}=i$ ، 4/ $(2z+1-i)(i\bar{z}+i-2)=0$

إعداد الأستاذ حليلات عمار

التمرين (04) في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نضع $L=\dfrac{z+1}{z-1}$ و M' صورة العدد المركب L .

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالات التالية :

أ ــ يكون L عددا حقيقيا .

ب ــ يكون L عددا تخيليا صرفا .

جــ ــ تكون النقط O ، M و M' في استقامية .

التمرين (05) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

$z=x+iy$ عدد مركب حيث $z\neq 2i$ و x ، y عددان حقيقيان .

نعتبر العدد المركب L حيث $L=\dfrac{z-2+i}{z+2i}$.

1) أكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

2) عين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا .

3) عين F مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا.

4) أنشئ المجموعتين E و F .

التمرين (06) 1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2i\overline{z}=0$ ....(1)

2/ نسمي O ، A ، B ، C صور حلول المعادلة (1) في المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. أثبت أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

التمرين (07) 1/ حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة التالية: $\begin{cases} iz_1+(1-i)z_2=-4-3i \\ (1+i)z_1+2iz_2=13+9i \end{cases}$

نسمي A و B صور الحلول z_1 و z_2 على الترتيب في المستوي المركب المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. ونسمي C صورة العدد z حل المعادلة التالية: $(3-i)\overline{z}+5-i=6+2i$

2/ عيّن طبيعة المثلث ABC. 3/ عيّن لاحقة G مركز ثقل المثلث ABC .

التمرين (08) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

A ، M و M' نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : 1 ، z و $1+z^2$.

– عيّن مجموعة النقط M من المستوي بحيث تكون A ، M و M' على استقامة واحدة

التمرين (09) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

z عدد مركب صورته M : نضع $L=(z-2i).(\overline{z}-1)$

عيّن مجموعة النقط M حتى يكون : أ) L حقيقي

ب) L تخيلي صرف

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (10) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

z عدد مركب صورته M : نضع $L=(1-z).(1-iz)$

عيّن مجموعة النقط M حتى يكون : أ) L حقيقي ، ب) L تخيلي صرف

التمرين (11) حل في $\mathbb{C}^2$ الجمل ذات المجهول $(z;z')$ التالية :

/1 $\begin{cases} iz_1+(2+i)z_2=4+i \\ z_1-(3-2i)z_2=-3+8i \end{cases}$ ، /2 $\begin{cases} 2iz+z'=2i \\ 3\overline{z}+i\overline{z'}=1 \end{cases}$

الجزء الثاني: العمليات على الشكل المثلثي و الأسي

التمرين (12) اكتب الأعداد المركبة التالية على شكلها المثلثي :

$z_1=1+i$ ، $z_2=3-3i$ ، $z_3=-\sqrt{3}-i$ ، $z_4=1-i\sqrt{3}$ ، $z_5=-\sqrt{6}+i\sqrt{2}$

$z_6=-\sqrt{5}-i\sqrt{15}$ ، $z_7=-2+2i$ ، $z_8=\dfrac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}$ ، $z_9=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ ، $z_{10}=\dfrac{2}{1+i\sqrt{3}}$

التمرين (13) ليكن العدد المركب Z حيث : $Z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$

1) احسب طويلة العدد المركب Z و عمدة له .

2) اكتب Z على الشكل الجبري .

3) استنتج $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

4) بيّن ان : $\left(\dfrac{Z}{\sqrt{2}}\right)^{12n}$ عدد حقيقي

التمرين (14) z ، v و u أعداد مركبة حيث:

$z=\left(3+\sqrt{3}\right)+i\left(-3+\sqrt{3}\right)$ ، $u=3+i\sqrt{3}$ و $v=\dfrac{z}{u}$.

1) أكتب v على الشكل الجبري .

2) عين الطويلة وعمدة لكل من الأعداد المركبة u ، v و z.

3) استنتج $\cos\dfrac{\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

4) أثبت أن العدد z^{2010} تخيلي صرف .

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (15) في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، عين الطويلة وعمدة للعدد المركب z

أ ـــ $z=4\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. ب ـــ $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

جـــ ـــ $z=\sqrt{5}\left(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6}\right)$. د ـــ $z=\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}$.

التمرين (16) I) z_1 و z_2 عددان مركبان حيث : $|z_1|=|z_2|=1$

– برهن ان العدد $\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1.z_2}\right)$ حقيقي

II) z_1 و z_2 عددان مركبان مختلفان لهما نفس الطويلة .

– أثبت أن العدد المركب $\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right)$ تخيليا صرف

التمرين (17) A ؛ B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب

$z_1=1$ ، $z_2=2i$ و $z_3=-1-i$.

1) أحسب $|z_2-z_1|$ و $|z_3-z_1|$.

2) أحسب $Arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)$. 3) استنتج طبيعة المثلث ABC.

التمرين (18) 1/ أكتب على الشكل الجبري كل من الأعداد المركبة التالية :

$6e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ؛ $\sqrt{5}e^{i\frac{3\pi}{2}}$ ؛ $\frac{1}{2}e^{i\pi}$ ؛ $2\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

2/أكتب الأعداد المركبة التالية على الشكل الأسّي .

$z_1=2-2i$ ؛ $z_2=3\sqrt{3}-3i$ ؛ $z_3=\frac{5}{4}i$ ؛ $z_4=-1$.

3/ أعط شكلا أسيّا لكل من الأعداد المركبة التالية .

$z_1=\left(2\sqrt{3}+6i\right)e^{i\frac{\pi}{2}}$ ؛ $z_2=\left(\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{3}}$ ؛ $z_3=\left(1-\sqrt{2}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$ ؛ $z_4=3\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right)$

التمرين (19) المستوي المركب منسوب إلى المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدة الرسم $4cm$).

نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق على الترتيب $a=1$ ، $b=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ،

$c=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ و $d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

1) أكتب c على الشكل الأسّي و d على الشكل الجبري .

2) مثل النقط A ، B ، C و D في المعلم ثم برهن أن الرباعي $OACB$ هو معين .

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (20) احسب :

$$z_1=\left(1+i\sqrt{3}\right)^5+\left(1-i\sqrt{3}\right)^5 \quad ، \quad z_2=\frac{(1+i)^4}{\left(\sqrt{3}-i\right)^3} \quad ، \quad z_3=\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2(1-i)}\right)^{1990}$$

التمرين (21) عيّن الطويلة وعمدة لكل عدد مركب مما يلي :

1) $z_1=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ و $\alpha\in[0;2\pi[$ ، 2) $z_2=1-\cos\alpha+i\sin\alpha$ و $\alpha\in[0;2\pi[$

3) $z_3=\dfrac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}$ و $\theta\in\left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ ، 4) $z_4=\dfrac{1}{1-i\tan\theta}$ و $\theta\in\left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

التمرين (22) نعتبر العددين المركبين z_1 ، z_2 حيث : $z_1=-\sqrt{3}+i$ و $z_2=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

1) أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

2) استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب L حيث : $L=\dfrac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$

3) اكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

4) استنتج قيمتي : $\cos\dfrac{13\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{13\pi}{12}$

التمرين (23) لتكن A ، B ، C و D أربع نقط لواحقها على التوالي :

$a=-1+i$ ، $b=-1-i$ ، $c=2i$ ، $d=2-2i$

1) احسب الطويلة وعمدة كل من العددين المركبين : $\dfrac{c-a}{d-a}$ و $\dfrac{c-b}{d-b}$

2) استنتج طبيعة كل من المثلثين ACD و BCD

3) بيّن أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها

التمرين (24) 1) برهن أنّ : $\dfrac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{5}}}=\dfrac{e^{i\frac{2\pi}{5}}}{\sin\frac{\pi}{10}}$

2) أحسب المجموع $1+e^{i\frac{\pi}{5}}+e^{i\frac{2\pi}{5}}+e^{i\frac{3\pi}{5}}+e^{i\frac{4\pi}{5}}$.

3) عين قيمة لكل من المجموعين S و T حيث $S=\sum_{k=0}^{4}\cos\dfrac{k\pi}{5}$ و $T=\sum_{k=0}^{4}\sin\dfrac{k\pi}{5}$.

التمرين (25) : 1) بيّن أن : $e^{i\frac{\pi}{11}}+e^{i\frac{3\pi}{11}}+e^{i\frac{5\pi}{11}}+e^{i\frac{7\pi}{11}}+e^{i\frac{9\pi}{11}}=\dfrac{ie^{-i\frac{\pi}{22}}}{2\sin\frac{\pi}{22}}$

2) استنتج أن : $\cos\dfrac{\pi}{11}+\cos\dfrac{3\pi}{11}+\cos\dfrac{5\pi}{11}+\cos\dfrac{7\pi}{11}+\cos\dfrac{9\pi}{11}=\dfrac{1}{2}$

الجزء الثالث: المعادلات من الدرجة الثانية

التمرين (26) :عيّن الجذرين التربيعيين لكل من الأعداد المركبة التالية :

$1+4\sqrt{5}i$ ، -4 ، $2i$ ، $-3-4i$ ، $-15+8i$ ، $8-6i$

التمرين (27) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ كلا من المعادلات التالية :

1/ $z^2+(7-4i)z+9-15i=0$ ، **2/** $z^2-2(2-i)z+6=0$

3/ $z^2+2z+10=0$ ، **4/** $z^2+\left(\sqrt{3}-7i\right)z-4\left(3+i\sqrt{3}\right)=0$

5/ $z^2+4=0$ ، **6/** $iz^2-2iz+i+2=0$

7/ $\alpha z^2+(1-i\alpha^2)z-\alpha i=0$ ، **8/** $z^2+8i=0$

9/ $2z^2+8z\sin\theta+5-3\cos(2\theta)=0$

التمرين (28) 1) أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $-8+6i$

2) يعطى كثير الحدود للمتغير المركب z :

$$Q(z)=z^3+(5i-6)z^2+(9-24i)z+18+13i$$

أ- احسب $Q(-i)$

ب- حل عندئذ في $\mathbb{C}$ المعادلة $Q(z)=0$

3) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

لتكن A ، B و C صور حلول المعادلة $Q(z)=0$. ما نوع المثلث ABC

التمرين (29) 1) اكتب على الشكل المثلثي العدد المركّب $(-1-i)$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركّبة المعادلة ذات المجهول Z التالية :

$$\frac{(1-3i)z+3+i}{z-i}=z \; .$$

3) نرمز بالرمز z_0 لحل المعادلة السابقة الذي له أصغر طويلة .

أ ــ أحسب العدد المركّب $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{1984}$ و أكتبه على الشكل الجبري.

ب ــ ما هي قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركّب $\left(\frac{z_0}{\sqrt{2}}\right)^{n}$ عددا حقيقيا ؟

﴿التدريب على حل تمارين بكالوريات﴾

التمرين (01) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

$z=x+iy$ عدد مركب حيث $z\neq 2i$ و x ، y عددان حقيقيان .

نعتبر العدد المركب L حيث . $L=\dfrac{z+8+4i}{z-2i}$

1) أكتب العدد المركب L على الشكل الجبري .

2) عين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L حقيقيا .

3) عين F مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها L تخيليا صرفا.

4) أنشئ المجموعتين E و F .

التمرين (02) ليكن كثير الحدود $P(z)$ للمتغيّر المركّب z المعرّف كما يلي :

$$P(z)=z^3-(4+i)z^2+(5+4i)z-5i.$$

1) تحقق من أنّ $P(2+i)=0$ ؛ جد كثير الحدود $Q(z)$ للمتغيّر المركّب z حتى يكون من أجل كل عدد مركّب z : $P(z)=(z-2-i).Q(z)$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z :. $P(z)=0$

3) لتكن A ، B و C صور حلول المعادلة $P(z)=0$ في المستوي المركّب حيث A صورة الحل $(2+i)$.

– جد إحداثيات النقطة D حتى تكون النقطة A مركز ثقل المثلث BCD.

التمرين (03) نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة المعادلة (E) ذات المجهول z التالية :

$$z^3-(6+i)z^2+(13+i)z-10+2i=0.$$

1) أثبت أنّ المعادلة (E) تقبل حلا حقيقيا z_0 يطلب تعيينه .

2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة (E) . نسمي z_1 الحل الذي جزئه التخيّلي سالب و z_2 الحل الثالث.

3) في المستوي المركب لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب z_0 ، z_1 و z_2.

ــ جد إحداثيتي النقطة G مرجّح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات: -2 ، 3 و 1 على الترتيب .

ــ عيّن المجموعة $\mathcal{E}_M$ للنقط M من المستوي حيث :

$$-2MA^2+3MB^2+MC^2=9.$$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (04) نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغيّر المركّب z المعرّف كما يلي :

$.P(z)=z^3-(3+i)z^2+(4+i)z+2i-4$

1) أحسب $P(2)$ ، جد كثير الحدود $Q(z)$ للمتغيّر المركّب Z بحيث يكون من أجل كل عدد مركّب z : $P(z)=(z-2).Q(z)$.

2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z : $P(z)=0$.

3) في المستوي المركب لتكن A، B و C صور حلول المعادلة $P(z)=0$.

– ما هي طبيعة المثلث ABC؟

التمرين (05) 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، كلا من المعادلتين :

$z^2-2z+5=0$ ؛ $z^2-2(1+\sqrt{3})z+5+2\sqrt{3}=0$.

2) في المستوي المزود بالمعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D صور الأعداد المركبة $1+2i$ ، $1+\sqrt{3}+i$ ، $1-2i$ و $1+\sqrt{3}-i$ على الترتيب .

أ ــ ما هي طبيعة المثلث ABC ؟

ب ــ أكتب معادلة للدائرة C المحيطة بالمثلث ABC .

ج ــ أثبت أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة C.

د ــ أنشئ C والنقط A ، B ، C و D في المعلم المعطى .

التمرين (06) من اجل كل عدد مركّب $z\neq 2i$ نعتبر العدد المركّب $L(z)$ بحيث :

$.L(z)=\dfrac{(5-i)z+2(1+i)}{iz+2}$

1) جد الأعداد المركّبة z بحيث : $L(z)=z$. ثم أكتب هذه الأعداد على الشكل المثلثي .

2) في المستوي المركّب لتكن النقطة M التي إحداثياها $(x;y)$ ولاحقتها z .

ــ أكتب على الشكل الجبري العدد $L(z)$.

ــ عيّن مجموعة النقط M التي لاحقتها z بحيث يكون $L(z)$ عددا تخيّليا صرفا

التمرين (07) 1) r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي .

α عدد مركب طويلته r وعمدته θ .

أ– حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z التالية:

$z^2-\alpha z+\alpha^2=0$ (نرمز لحلي هذه المعادلة بــ z_1 و z_2)

ب– عبر بدلالة r و θ على طويلتي z_1 و z_2 وعمدتيهما

2/ ليكن العدد المركب L حيث : $L=(\sqrt{6}-\sqrt{2})-(\sqrt{6}+\sqrt{2})i$

أ– احسب L^2 و اكتبه على شكله المثلثي . ب– استنتج الطويلة وعمدة للعدد L

جــ– استنتج قيمتي : $\cos\dfrac{19\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{19\pi}{12}$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (08) 1- أ- احسب $\left(\sqrt{3}+3i\right)^{2}$ ، ثم حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$2z^{2}+\left(3\sqrt{3}+i\right)z+4=0$$

نرمز بـــ z_1 و z_2 لحلي المعادلة المعطاة حيث : $|z_1|\prec|z_2|$

ب - اكتب كلا من z_1 و z_2 على شكله الأسي .

2- في المستوي المزود بالمعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. نعتبر العدد المركب $L=-2(\sin\theta+i\cos\theta)$

حيث θ عدد حقيقي ، ولتكن النقط A ، B و M صور الأعداد المركبة z_1 ، z_2 ، L على الترتيب . أ- احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب L بدلالة θ

ب- نضع : $\theta=\frac{2\pi}{3}$ - اثبت أن المثلث ABM قائم .

التمرين (09) 1) حل في $\mathbb{C}^2$ الجملة التالية :

$$\begin{cases} z_1+z_2=6-4i \\ z_1\times z_2=13-18i \\ |z_1|\prec|z_2| \end{cases}$$

2) في المستوي المزود بالمعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. A ، B و C صور الأعداد المركبة : $-i$ ، z_1 ، z_2 على الترتيب . ما نوع المثلث ABC

3) عيّن معادلة الدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC.

4) عيّن معادلة المماس (Δ) للدائرة (Γ) في النقطة C .

التمرين (10) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^{3}-\left(1+i\sqrt{2}\right)z^{2}+\left(1+i\sqrt{2}\right)z-i\sqrt{2}=0$

1- أ) بيّن ان هذه المعادلة تقبل حلا تخيليا z_0 يطلب تعيينه

ب) احسب الحلين الآخرين z_1 و z_2 حيث : z_1 هو الحل الذي جزؤه التخيلي موجب.

2- في المستوي المزود بالمعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. لتكن A ، B و C صور الأعداد المركبة : z_0 ، z_1 ، z_2 على الترتيب .

أ) عين لاحقة النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات (-3) ، $\left(1+\sqrt{6}\right)$ و $\left(1-\sqrt{6}\right)$ على الترتيب .

ب) بين أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

التمرين (11) 1/ عين الطويلة وعمدة للعدد المركب : $-8+8\sqrt{3}i$

2/ عين كل الأعداد المركبة L بحيث : $L^{4}=-8+8\sqrt{3}i$.

3/ حل عندئذ في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة :

$$\left(z+i\right)^{4}-8\left(-1+i\sqrt{3}\right)=0$$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (12) لتكن في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية :

$$z^2-\left[\sqrt{3}+1+2i\right]z+\left(\sqrt{3}-1\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)=0 \ldots\ldots(1)$$

1) أ) احسب $\left(\sqrt{3}-1\right)^2$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1)

نســـــمي z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة بحيث : $|z_1|\succ|z_2|$

ب) اكتب كلا من العددين z_1 و z_2 على الشكل المثلثي ثم استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب $z_1\times z_2$.

2) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_1\times z_2}{2\sqrt{2}}\right)^n$ عددا حقيقيا موجبا.

3) نضع : $a=\frac{z_1}{2}$ و $b=\frac{z_2}{\sqrt{2}}$ و $L=\frac{a+b}{1+ab}$

أ) تحقق ان $|a|=|b|=1$.

ب) احسب مرافق L بدلالة a و b واستنتج أن L حقيقي .

التمرين (13) نعتبر كثير الحدود للمتغيّر المركب z المعرّف بـــ :

$P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$.

1. أ ــ أحسب $P\left(i\sqrt{3}\right)$ و $P\left(-i\sqrt{3}\right)$.

ب ــ برهن أنّه توجد أعداد حقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد مركب z

$P(z)=\left(z^2+3\right)\left(az^2+bz+c\right)$.

2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z ، $P(z)=0$.

. المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

أ ــ مثّل النقط A ، B ، C و D ذات اللواحق على الترتيب $z_A=i\sqrt{3}$ ، $z_B=-i\sqrt{3}$

، $z_C=3+2i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_C}$

ب ــ أثبت أنّ النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة.

4. لتكن النقطة E نظيرة D بالنسبة إلى المبدأ O .

بيّن أن $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثمّ عيّن طبيعة المثلث BEC .

التمرين (14) α عدد مركب غير معدوم . **1.** أنشر العبارة $\left[1-i\left(1+\alpha\right)\right]^2$.

2. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية ذات المجهول z :

$$z^2+\left[-1+i\left(1-\alpha\right)\right]z+i\alpha+\alpha=0$$

نرمز بـــ z_1 و z_2 إلى حلي هذه المعادلة حيث z_2 هو الحل المستقل عن α

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

3. نفرض في هذا السؤال أنّ $\alpha = iy$ حيث y عدد حقيقي غير معدوم .

أكتب كلا من z_1 و z_2 على شكله المثلثي .

4. المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.

A و M نقطتان من المستوي لاحقتاهما z_2 و z على الترتيب ، ولتكن $\mathcal{E}_p$ مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها : $\left(z-z_2\right)\left(\overline{z-z_2}\right)=2$.

تحقق أنّ مبدأ المعلم O ينتمي إلى $\mathcal{E}_p$ ثمّ عيّن $\mathcal{E}_p$

التمرين (15) لتكن في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة التالية :

$$z^3+2\left(-\sqrt{3}+i\right)z^2+4\left(1-i\sqrt{3}\right)z+8i=0........(1)$$

1. بيّن أن المعادلة (1) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه.
2. حل عندئذ المعادلة (1) .نسمي z_1 و z_2 الحلين الآخرين حيث الجزء التخيلي للعدد z_1 سالب

1. نضع : $\omega=\dfrac{z_1}{z_2}$.أ) عيّن الشكل المثلثي للعدد ω.

ب) المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.بكل عدد مركب z غير معدوم نرفق النقط M ، M_1 ، M_2 التي لواحقها على الترتيب : z ، ωz ، $\omega^2.z$.

– برهن أن الرباعي OMM_1M_2 معيّن.

التمرين (16) 1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$z^2-(1+i)z-4i=0$ وليكن z_1 و z_2 حلي هذه المعادلة

2/ نعتبر المعادلة : $z^4-(1+i)z^3+(9-4i)z^2-9(1+i)z-36i=0$

أ) بيّن ان لهذه المعادلة حلين تخيليين صرفيين متعاكسين z_3 ، z_4 يطلب تعيينهما.

ب) استنتج مجموعة حلول هذه المعادلة .

3/ المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. M نقطة من المستوي لاحقتها z

– اوجد مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون : $\arg\left(\dfrac{z-z_3-z_4}{z-z_1-z_2}\right)\equiv\dfrac{-\pi}{2}[2\pi]$

التمرين (17) α عدد مركب حيث : $\alpha=\sqrt{2-\sqrt{2}}-i\sqrt{2+\sqrt{2}}$

1) احسب α^2 و α^4 ثم اكتب α^4 على شكله المثلثي .

2) استنتج الطويلة وعمدة للعدد α .ثم احسب كلا من العددين : $\cos\dfrac{13\pi}{8}$ و $\sin\dfrac{13\pi}{8}$

3) المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. M نقطة لاحقتها z عين مجموعة النقط M بحيث : $|\alpha.z|=8$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (18) 1/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : (1)............$(iz-1)\left[z^2-(1+4i)z-(5+i)\right]=0$

نرمز بـــ z_0 ، z_1 و z_2 إلى حلول المعادلة (1) حيث : $|z_0|\prec|z_1|\prec|z_2|$

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها z_0 ، z_1 و z_2 على الترتيب .

2/ أ) أوجد احداثيي النقطة G مرجح الجملة : $\{(A;1),(B;2),(C;1)\}$

ب) عيّن مجموعة النقط M ذات اللواحق z بحيث :

$$|z-z_0|^2+2|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=34$$

التمرين (19) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

ليكن كثير الحدود $f(z)$ للمتغير المركب z حيث أن :

$$f(z)=z^3+\left(14-i\sqrt{2}\right)z^2+\left(74-14i\sqrt{2}\right)z-74i\sqrt{2}\ .$$

1) أثبت أن $f(z)$ يقبل جذرين مترافقين يطلب تعيينهما.

2)حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $f(z)=0$.

نسمي A ، B ، C صور الأعداد : $-7+5i$ ، $-7-5i$ ، $i\sqrt{2}$ و على الترتيب .

3) لتكن D النقطة التي لاحقتها $1+i$.عين لاحقة النقطة E حيث $ABDE$ متوازي الأضلاع .

4) لتكن F النقطة التي لاحقتها $1+11i$. نضع $\omega=\dfrac{(z_A-z_D)}{(z_F-z_B)}$.

أ) أكتب ω على الشكل الجبري .

ب) أكتب ω على الشكل الأسي .

5) أثبت أن المستقيمين (AD) و (BF) متعامدان.

- استنتج طبيعة الرباعي $ABDF$.

التمرين (20) 1/ احسب الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $-2-2\sqrt{3}i$

2/ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$z^2-2z+3+2\sqrt{3}i=0$$

(نسمي حلي هذه المعادلة z_0 و z_1 حيث : $|z_0|\prec|z_1|$)

3/ φ عدد حقيقي ، z عدد مركب حيث : $z=1+2\cos\varphi+2i\sin\varphi$

M_0 ، M_1 ، M نقط من المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ لواحقها z_0 ، z_1 ، z على الترتيب .

أ) ما هي قيم φ حتى تكون M عنصرا من $\{M_0,M_1\}$

ب)إذا كانت M تختلف عن M_0 و M_1 برهن أن المثلث M_0MM_1 قائم في M

جـ) عين قيم φ حتى يكون $M_0M=\dfrac{1}{2}M_0M_1$. أنشئ M عندئذ .

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (21) : نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2+2z+1+i=0$

نرمز بـــ z_1 و z_2 للحلين بحيث : $\Im m(z_1)\succ 0$

1/ حدد z_1 و z_2

2/ المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$. نعتبر النقط A و B و M_1 و M_2 التي لواحقها على التوالي : -1 و $\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ و z_1 و z_2 .

أ) اكتب العدد المركب $\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ على الشكل المثلثي .

ب)تحقق من أن : $\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{OB}$ وان A منتصف القطعة $[M_1M_2]$ ثم انشئ النقط : A و B و M_1 و M_2.

جــ) استنتج أن $AOBM_1$ معين ثم أن $\arg(z_1)\equiv\frac{7\pi}{8}[2\pi]$.

التمرين (22) ينسب المستوي المركب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

$z=x+iy$ عدد مركب و x ، y عددان حقيقيان .

نعتبر العدد المركب L حيث . $f(z)=\frac{2z-i}{z+1-i}$

1) أكتب العدد المركب $f(z)$ على الشكل الجبري .

2) عين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $f(z)$ حقيقيا .

3) عين F مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $f(z)$ تخيليا صرفا.

4) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $|f(z)|=\sqrt{3}$

5) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z)=z$

الهدية

يقول الشاعر أبو القاسم الشابي:

إذا ما طمحت إلى غاية لبست المنى وخلعت الحذر

ولم أتخوف وعور الشعاب ولا كبة اللهب المستعر

ومن لا يحب صعود الجبال يعش ابد الدهر بين الحفر

الصبر هو زاد العظماء والجد والكفاح شعارهم وأترككم لبيت يوجهه الشافعي لمن يعيش يحلم دون أن يعمل لما يحلم به شيئا:

و أبيت سهران الدجى وتبيته نوما وتبغي بعد ذاك لحاقي

وقد قالوا: إن العلم عزيز؛ إذا أعطيته كلك أعطاك بعضه. أقول فكيف إذا أعطيته بعضك، بل توافه وقتك، فما عساك أن تنال منه .

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

POINT DE VUE HISTORIQUE

***Il n'existe pas de réel dont le carré soit strictement négatif**. Pourtant dès le 16ème siècle les algébristes italiens dont le plus célèbre d'entre-eux Jérôme Cardan n'hésitent pas à utiliser le symbole $\sqrt{-a}$ lorsque a est un nombre réel strictement positif pour représenter le résultat de l'extraction impossible de la racine carrée du nombre négatif -a. Ils décrivent en détail les règles de cacul permettant de manipuler ces nouveaux nombres appelés par eux **"NOMBRES IMPOSSIBLES".En 1572 Bombelli montre à l'aide de la formule de Cardan que la racine x=4 de l'équation $x^3-15x-4=0$ peut s'écrire** $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=4$. A l'origine il s'agissait seulement de donner des racines à toutes les équations du second degré. Les résultats obtenus dans l'étude des équations du 3ème degré allaient familiariser les mathématiciens avec ces symboles et mettre en évidence leur rôle comme intermédiaire commode de calcul dans de nombreux cas. Pour ces raisons sommes toutes empiriques, les mathématiciens utilisaient avec une confiance croissante les nombres IMAGINAIRES depuis le début du 17ème siècle. Dès 1629 A.Girard soupçonnait que toute équation de degré n à n racines réelles ou complexes. Ce sont les mathématiciens du 19ème siècle qui ont construit les nombres complexes à partir des quantités connues et qui leur ont donné une "réalité mathématique".

***Extrait de l'encyclopédie Universalis**.

سلسلة استعد للبكالوريا رقم (07)

المستوى : ثالثة ثانوي — السنة الدراسية 2009/2008

الشعبـــــة : علوم تجريبية + رياضيات

و تقني رياضي

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

• المحور : الاستدلال بالتراجع و المتتاليات العددية •

الاستدلال بالتراجع

التمرين (01) برهن بالتراجع أن :

1) لكل عدد طبيعي n غير معدوم ، العدد $3\times 5^{2n-1}+2^{3n-2}$ يقبل القسمة على 17.

2) لكل عدد طبيعي n ، العدد $3n^3+6n$ مضاعف للعدد 9

– استنتج أن مجموع مكعبات ثلاثة أعداد طبيعية متعاقبة يقبل القسمة على 9.

3) لكل عدد طبيعي n ، العدد $2^{6n+5}+4\times 5^{2n+1}$ يقبل القسمة على 13.

4) لكل عدد طبيعي n ، العدد $10^{6n+2}+10^{3n+1}+1$ يقيل القسمة على 111

التمرين (02) : برهن بالتراجع أن :

1) لكل عدد طبيعي n ، $0^2+1^2+2^2+......+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) لكل عدد طبيعي n غير معدوم

$$(1\times 2^0)+(2\times 2^1)+(3\times 2^2)+..........+(n\times 2^{n-1})=1+(n-1).2^n$$

3) لكل عدد طبيعي n ، $1-3+5-7+..........+(-1)^n.(2n+1)=(-1)^n.(n+1)$

4) لكل عدد طبيعي n ، $1+2^3+3^3+..........+n^3=\dfrac{1}{4}.n^2.(n+1)^2$

5) لكل عدد طبيعي n غير معدوم : $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+........+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

التمرين (03) f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $f_1=f$ و $f_{n+1}=f_n\circ f$

1/ احسب كلا من : $f_2(x)$ و $f_3(x)$ و $f_4(x)$

2/ أعط تخمينا لعبارة $f_n(x)$

3/ برهن بالتراجع التخمين الموضوع سابقا ، ثم استنتج عبارة $f_n(x)$

التمرين (04) برهن بالتراجع أن :

1) من أجل كل عدد طبيعي اكبر من أو يساوي 6 : $3^n \geq 100n$

2) لكل عدد طبيعي n ، $(1+\alpha)^n \geq 1+\alpha n$ حيث α عدد حقيقي موجب تماما (متباينة برنولي)

– استنتج أنه إذا كان $q \succ 1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$

التمرين (05) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x+5}{x-1}$

1/ عيّن f' ، f'' ، $f^{(3)}$ و $f^{(4)}$ الدوال المشتقة المتتابعة للدالة f

2/ أعط تخمينا ، حسب قيم العدد n لعبارة $f^{(n)}(x)$

3/ برهن بالتراجع صحة تخمينك

تعريف : عاملي العدد الطبيعي n هو العدد الطبيعي الذي نرمز له بـــ

التمرين (06) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=x\cos x$.

1) من أجل كل عدد حقيقي x ، أحسب $f'(x)$ ، $f''(x)$ و $f^{(3)}(x)$.

2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، ومن أجل كل عدد حقيقي x ،

$$f^{(n)}(x)=x\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+n\cos\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

التمرين (07) n عدد طبيعي ، نسمي $P(n)$ الخاصية : 9 يقسم 10^n+1

أ) أثبت أن $P(n)$ خاصية وراثية

ب) هل من اجل كل عدد طبيعي n ، 10^n+1 مضاعف 9 ؟

ج) ماهي النتيجة المستخلصة من هذا التمرين ؟

Le raisonnement par récurrence est la version mathématique du raisonnement « de proche en proche ». Il s'énonce comme suit :

Principe de récurrence - Soient $P_0, P_1, \dots, P_n \dots$ des propriétés mathématiques. On sait que P_0 est vraie. On sait aussi que, pour un *n* quelconque, si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie aussi. Alors, toutes les propriétés P_n sont vraies.

Une application simple de ce principe est la définition par récurrence : si on définit un objet x_0 puis si, pour tout entier *n*, on donne une manière de définir l'objet x_{n+1} à partir de l'objet x_n, alors les objets x_n sont bien définis pour tout *n*.

Une démonstration par récurrence **contient donc toujours deux étapes** :

- L'initialisation : c'est la vérification de P_0. **Il ne faut jamais l'oublier**, **sinon on raisonne sur du vide** !
- La récurrence proprement dite : on suppose que la propriété P_n est vraie (on l'appelle hypothèse de récurrence), et on essaie de montrer P_{n+1} à partir d'elle

عموميات على المتتاليات العددية :اتجاه التغير ، التقارب ، المتتاليات المحدودة ، التمثيل البياني

التمرين (01) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$u_1 = 1 \quad ، \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^{\;2} - 2u_n + 4)$$

1/ احسب u_2 و u_3 . 2/ بيّن أن المتتالية (u_n) متـــزايدة .

3/ بيّن أن : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 1)^2 + \frac{3}{2}$ ثم برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2

4/ استنتج أن (u_n) متقاربة و احسب نهايتها .

التمرين (02) (u_n)المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ، أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

التمرين (03) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$ و $u_0 = 1$

1) أ- ارسم في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحني (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

ب- باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

جـــ - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

2) أ- برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$ وماذا تستنتج ؟

ب- تحقق أن (u_n) متناقصة .

جـــ - أستنتج أن (u_n) متقاربة ؟ و أحسب نهايتها

التمرين (04) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \qquad n \geq 1 \end{cases}$$

1) احسب الحدود : u_2 ، u_3 و u_4 .أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n

2) أثبت أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متزايدة تماما

3) أثبت بالتراجع أن : $u_n = \sqrt{n}$ ثم استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متباعدة .

التمرين (05) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$

1) أ – ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحني (C) الممثل للدالة f المعرفة على المجال $[-6;+\infty[$ بـــــ : $f(x) = \sqrt{x+6}$

ب– باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

ج) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ وتقاربها.

2) أثبت بالتراجع أنه لكل n من $\mathbb{N}$ يكون : $u_n \prec 3$

3) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ . . ماذا تستنتج ؟ اوجد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

التمرين (06) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بحدها الأول $u_1 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + u_n$

1–مثل بيانيا المتتالية (u_n) في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

2– ضع تخمين حول اتجاه تغير (u_n) ثم أثبت صحة تخمينك

التمرين (07) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 \in [0,1]$ و $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$

1)بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 1$

2)أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة – أســــــتنتج أنها تقبل نهاية يطلب حسابـــــــها

3)نضع : $u_0 = \cos(\theta)$ / $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

أ)برهن بالتراجع أن : $u_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$. ب) أحسب نهاية (u_n)

التمرين (08) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2+1}$ لكل n من N

1/ أ– بيّن أن $u_n \succ 0$ لكل n من N . ب– بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة و ماذا تستنتج؟

2/ أ– بيّن أن $u_{n+1} \prec \frac{1}{3}u_n$ لكل n من N

ب– استنتج أن : $u_n \le \left(\frac{1}{3}\right)^n$ لكل n من N ثم احسب $\lim u_n$

التمرين (09) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_0 = \frac{4}{3}$ و $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+3}u_n$

1) احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .ثم برهن بالتراجع أنه : $u_n = \frac{8}{(n+2)(n+3)}$

2) أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \frac{a}{n+2} + \frac{b}{n+3}$

3) استنتج المجموع : $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots.. + u_n$ ثم احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (10) ادرس تقارب المتتاليات التالية المعرفة بحدها العام

1) $u_n=\dfrac{3n+2}{2n-1}$ ، 2) $u_n=e^{1-n}$. 3) $u_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{2n+3}\right)$. 3) $u_n=\sqrt{\dfrac{n^2+2}{2n+3}}$

4) $u_n=\ln\left(3+e^{2-n}\right)$. 5) . 5) $u_n=\dfrac{n\sqrt{n}+n}{n+1}$ 6) $u_n=\dfrac{e^{-n}-1}{2e^{-n}+1}$. 7) $u_n=\ln\left(\dfrac{e^n-3}{e^n+1}\right)$

8) $u_n=\ln\left(\dfrac{e^n+2}{e^{2n}+1}\right)$ ، 9) $u_n=(n+2)e^{-n}$ ، 10) $u_n=\dfrac{e^n-6}{2e^n+1}$ ، 11) $u_n=\dfrac{n\cos(2\pi n)}{n+1}$

التمرين (11) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$$u_n=\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\ldots\ldots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}\le u_n\le\dfrac{n}{n+1}$

2) أدرس تقارب كل من المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين بـــ :

$$v_n=\frac{n}{n+\sqrt{n}} \quad \text{و} \quad w_n=\frac{n}{n+1}$$

3) أستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وعين نهايتها .

التمرين (12) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$$u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}$$

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $\ln(x+1)\le x$

(يمكنك دراسة اتجاه تغير الدالة $f:x\to\ln(x+1)-x$)

2) استنتج : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k ، $\ln(k+1)-\ln k\le\dfrac{1}{k}$

ثم من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\ln(n+1)\le u_n$

3) ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

التمرين (13) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0=\dfrac{1}{2}$ و $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(u_n+\dfrac{2}{u_n}\right)$

1 . f الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالدستور : $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$

– ادرس تغيرات الدالة f وارسم تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ وحدة الطول : $2cm$

– باستعمال الرسم السابق أنشئ على محور الفواصل النقط A_0 ، A_1 ، A_2 و A_3 فواصلها على الترتيب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

2. بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_n \geq \sqrt{2}$

3. بيّن أنه من أجل كل $x \geq \sqrt{2}$ لدينا $f(x) \leq x$

4. أستنتج أن المتتالية متناقصة ابتداء من الرتبة الثانية .

5. بيّن أن المتتالية متقاربة .

6. لتكن l نهاية المتتالية (u_n) . بين أن l هو حل للمعادلة $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ واحسب قيمته .

التمرين (14) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

1 / برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $0 \leq u_n \leq 2$.

2/ بيّن أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متـــــزايدة و ماذا تستنتج ؟

3/ أ- بيّن أن : $2 - u_{n+1} \prec \frac{2 - u_n}{2}$

ب- بيّن أن : $0 \prec 2 - u_n \prec \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم استنتج $\lim u_n$

المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية (تذكير وتدعيم)

التمرين (15) (v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 و $\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{2} \\ v_1 + 4v_2 - v_3 = 7 \end{cases}$

1) عين الحدود v_2 ثم v_1 و v_3 وأساس المتتالية .

2) احسب الحد العام v_n بدلالة n .

3) عبر بدلالة n عن المجموع $s_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$

4) عيّن العدد n بحيث يكون : $s_n = -10$

التمرين (16) (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_1 و أساسها r .

أ- احسب u_1 و r علما أن : $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \\ u_4 + u_5 + u_6 + u_7 = 74 \end{cases}$

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم عين أصغر عدد طبيعي n يحقق : $u_n \succ 5978$

2/ (v_n) متتالية حسابية حدها الأول v_1 وأساسها q .

نضع : $s_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$

عين v_1 و q حتى يكون $2s_n = n(3n+7)$ من أجل كل n من N^*

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (17) (u_n) متتالية حسابية متناقصة حدها الأول u_0 و أساسها r علما أن :

$u_2 + u_3 + u_4 = -15$ و $u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 83$

1/ احسب الحد u_3 ثم استنتج r و الحد الأول u_0 .

2/ عين الحد العام u_n بدلالة n ثم احسب المجموع $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

التمرين (18) (u_n) متتالية حسابية حدودها الثلاثة الأولى u_1 ، u_2 ، u_3

تحقق الجملة : $\begin{cases} u_1 - 3u_2 + u_3 = -1 \\ u_1^2 - u_3^2 = -4\sqrt{2} \end{cases}$

1- أوجد كلا من : u_1 ، u_2 ، u_3

2- اكتب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

ثم أوجد العدد الطبيعي k حتى يكون : $S_k - S_{(k-2)} = 2 + 21\sqrt{2}$

3- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن العدد: $k^{4n+2} + 2\times 3^{8n+1}$ يقبل القسمة على 5

التمرين (19) $(u_n)_{n\in N^*}$ متتالية هندسية حدودها موجبة بحيث : $u_1 = 1$ و $u_3 + u_5 = 20$

1 - أوجد أساس هذه المتتالية وحدد اتجاه تغيرها وتقاربها

2- احسب بدلالة n المجموع : $G_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

3- احسب بدلالة n المجموع : $S_{n1} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + ... + u_n^2$

التمرين (20) 1) بين انه إذا كانت a ، b و c ثلاثة أعداد حقيقية حدود متعاقبة بهذا الترتيب

لمتتالية هندسية فإن : $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)(a-b+c)$

2) أوجد ثلاثة حدود متعاقبة لمتتالية هندسية علما أن مجموعها هو 78 ومجموع مربعاتها هو 3276

التمرين (21) (v_n) متتالية حدها الأول v_0 موجب تماما وحيث من أجل

كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} - v_n = 0.02v_n$

1/ أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها . ما هو اتجاه تغير هذه المتتالية ؟

ب- عبر عن v_n بدلالة n و v_0 .

2/احسب S_n بدلالة n و v_0 حيث : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$

3/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n \geq 50v_0$

4/ بلغ عدد سكان بلد 30 مليون نسمة يوم 1 جانفي 2000 ، نفرض أن عدد السكان يرتفع كل سنة بنسبة **2%** . - كم يبلغ عدد سكان هذا البلد يوم 1 جانفي 2020

التمرين (22) 1 **/**ما هي نهاية المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي :

$u_0 = 0.57$, $u_n = 0.\underbrace{57.........57}_{2n \text{ رقـــم}}$ ؟

2/ أستنتج الكتابة الكسرية للعدد الناطق التالي : $0.\overline{57}57.........$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (23) (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث :

$\ln u_3 - \ln u_2 = 1$ و $\ln u_3 + 2\ln\sqrt{u_6} = 11$

1- عيّن أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول u_0 .

2- اكتب u_n بدلالة n ثم ادرس اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n).

3- احسب المجموع : $u_1 + u_2 + ... + u_n$ بدلالة n

4- (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـــ : $v_n = 3\ln u_{n+1} - \ln u_n$

- أثبت أن (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
- احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_{n-1}$

التمرين (24) $(u)_{n\in N^*}$ متتالية هندسية متناقصة حيث :

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 84 \quad \text{و} \quad u_1 \times u_2 \times u_3 = 64$$

1/ احسب الحدود : u_2 ثم u_1, u_3 والأساس r للمتتالية .

2/ عبّر عن u_n بدلالة n و ادرس تقارب المتتالية $(u)_{n\in N^*}$

3/ احسب بدلالة n المجموع S حيث : $S = u_1 + u_2 + ...u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} S$

4/ احسب بدلالة n المجموع S' حيث : $S' = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_n}$

التمرين (25) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية رتيبة تحقق : $u_2 \times u_4 = 256$ و $u_2 + u_3 + u_4 = 56$

1) عين الحدين u_3 و u_0 و الأساس q

2) أعط عبارة الحد العام u_n بدلالة n

3) نفرض $u_0 = 2$ و $q = 2$ ونعتبر المتتالية العددية (v_n) حيث : $v_n = 2u_n + n$

أ) ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

ب) احسب كلا من المجموعين : $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ و $L_n = 0 + 1 + 2 + ... + n$

ج) استنتج المجموع : $K_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

التمرين (26) **1/** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية متناقصة حدها الأول u_0 و أساسها r .

أ- عيّن u_2 و r علمـــا أن : $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \end{cases}$

ب- استنتج u_n بدلالة n ثم احسب المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

2/ نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $v_n = e^{14-3n}$

أ- بيّن أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها

ب-احسب المجموع $T_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و الجـــداء $P_n = v_0 . v_1 . v_2 .... v_n$

د – احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (27) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=(1-2x)e^{2x}$

f' ، f'' ، $f^{(3)}$ ، ..... ، $f^{(n)}$ ترمز للمشتقات المتتابعة للدالة f حيث $n\geq 1$

1/ احسب f' ، f'' ، $f^{(3)}$.

2/ برهن بالتراجع انه من أجل كل $n\geq 1$ يكون : $f^{(n)}(x)=2^n.(1-n-2x)e^{2x}$

3/ $n\geq 1$، التمثيل البياني لـــ $f^{(n)}$ يقبل مماسا أفقيا في النقطة M_n

أ) عيّن x_n و y_n إحداثيتا النقطة M_n و تحقق أن M_n تنتمي إلى المنحني (γ)

الذي معادلته : $y=\dfrac{e^{2x}}{4^x}$.

ب)بيّن أن المتتالية (x_n) حسابية ، ماهي نهايتها

ج) بيّن ان المتتالية (y_n) هندسية ثم ادرس نهايتها.

التمرين (28) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=80+\alpha e^{\beta x}$

حيث α و β عددان حقيقيان . (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

عين α و β بحيث تكون النقطتان $A(0;53)$ و $B(3;60)$ نقطتان من (C) .

تعطي القيم الحقيقية للعددين α و β ثم تعطي القيمتين المدورتين إلى 10^{-1} لهما .

2 – يعطي إنتاج شركة في اليوم n (n عدد طبيعي غير معدوم)

بالعبارة : $u_n=80-27.e^{-0,1n}$ و حدة خلال بداية انطلاقها .

أ – بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ب – بعد كم يوم تزيد كمية الإنتاج على 72 وحدة .

3 – نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة بالعبارة : $V_n=e^{-0,1n}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

أ – برهن أن المتتالية (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها . احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$.

ب – احسب: $S=V_1+V_2+...+V_{10}$.

ج – ما هو إنتاج الشركة في مدة 10 أيام حيث تعطي قيمة مدورة إلى الوحدة لهذا الإنتاج

التمرين (29) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي :

$$u_n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+........+\frac{1}{4^n}=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{1}{4^k}$$

1/ ما هو اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ؟

2/ برهن أنه لكل عدد طبيعي n يكون : $u_n=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

3/ ما هي نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ؟

4/ نضع : $M=1.333\ 333\ 333$ هل العدد الحقيقي M حاد من الأعلى للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

المتتاليات التراجعية من الشكل : $u_{n+1}=f(u_n)$

التمرين (30) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{5u_n-4}{u_n+1} \end{cases}$$

1/ بيّن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \succ 2$

2/ ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ واستنتج أن $(u_n)_{n\in N}$ متقاربة واحسب $\lim u_n$

3/ لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على N كما يلي : $v_n=\dfrac{1}{u_n-2}$

أ- بيّن أن المتتالية (v_n) حسابية حدد أساسها وحدها الأول

ب- احسب نهاية المتتالية (u_n) بطريقة أخرى .

التمرين (31) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+2$ و $u_0=1$

1) ارسم المستقيمين (D) ذي المعادلة $y=\frac{3}{4}x+2$ و (Δ) ذي المعادلة : $y=x$ في معلم متعامد ومتجانس . عين A نقطة تقاطعهما ولتكن α فاصلة النقطة A .

2) مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5

3) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ وتقاربها.

4) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le 8$

5) ادرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. هل $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة ؟

6) أ) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n=u_n-\alpha$ ، برهن ان (v_n) متتالية هندسية

ب) أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين (32) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $(n\in\mathbb{N})$
$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{2}{3}u_n+\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

1- أ) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n\le 1$

ب) برهن أن (u_n) متزايدة . ماذا تستنتج ؟ احسب $\lim u_n$

2- لتكن f الدالة العددية المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية كما يلي : $f(x)=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$

أ) عين العدد الحقيقي α بحيث : $f(\alpha)=\alpha$

ب) نضع $v_n=u_n-\alpha$ من اجل كل عدد طبيعي n ، بين أن (v_n) متتالية هندسية

ج) احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

د) استنتج من جديد نهاية المتتالية (u_n)

3- احسب المجموعين : $s_n=v_0+v_1+.......+v_n$ و $s'_n=u_0+u_1+....+u_n$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (33) (u_n) متتالية عددية معرفة بـــ
$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$$

1/ احسب الحدود : u_1 ، u_2 و u_3 وضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n)

2/ أثبت أنه لكل عدد طبيعي n فإن : $u_n \prec 1$

3/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .بيّن أن (u_n) متقاربة و احسب نهايتها .

4/ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـــ : $v_n = \dfrac{1}{1-u_n}$

أ) احسب الحدود : v_0 ، v_1 و v_2 .

ب) برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها .

ج) احسب v_n ثم u_n بدلالة n ، استنتج من جديد نهاية المتتالية (u_n)

5/ احسب المجموع $s_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و n الجداء : $\Pi_n = u_1 u_2 ...... u_n$.

التمرين (34) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي : $(n \in \mathbb{N})$
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 1}{u_n + 4} \end{cases}$$

1/ أ- احسب u_1 و u_2

ب-بيّن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \succ 1$

ج- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ ثم أستنتج أنها متقاربة

2/ نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة لكل عدد طبيعي n بـــ : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ- برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب- احسب v_n بدلالة n

ج- استنتج أن : $u_n = \dfrac{5^{n+1} + 3^{n+1}}{5^{n+1} - 3^{n+1}}$ ثم احسب $\lim u_n$

3/ احسب بدلالة n كلا من : $s_n = v_0^2 + v_1^2 + ... + v_n^2$ و $p_n = v_0 v_1 v_2 ...... v_n$

التمرين (35) $(u_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{-7u_n - 8}{2u_n + 1}$

1) أحسب: u_1, u_2 2) أثبت أن: $u_n \neq -2$ لكل عدد طبيعي n

3) لتكن المتتالية العددية (t_n) المعرفة كما يلي: $t_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

أ) أثبت أن (t_n) متتالية حسابية يطلب تعيين الأساس.

ب) أحسب t_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (36) المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ معرفة بحدها الأول $u_0 = 24$ وبعلاقة التراجع الآتية :

$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 16$ من أجل كل عدد طبيعي n

1/ احسب u_1 ، u_2

2/ نضع : $v_n = u_n - \alpha$ حيث α عدد حقيقي

– أوجد العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية .

3/ لتكن المتتالية العددية (t) المعرفة بـــ : $t_n = u_n - 20$

أ-أثبت أن المتتالية (t) هندسية ، يطلب حساب حدها الأول و أساسها

ب- احسب t_n ثم u_n بدلالة n ادرس تقارب $(u_n)_{n\in N}$

4/ احسب المجموع $s_n = u_0 + u_1 + ...+ u_n$

التمرين (37) $(u_n)_{n\in N}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و $4u_{n+1} = u_n - 4$

1/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n + 4 \geq 0$

2/ برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما وماذا تستنتج ؟

3/ (v_n) متتالية عددية معرفة بـــــ : $v_n = 3u_n + \alpha$

أ- عين العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية – عين أساسها وحدها الأول

ب – أحسب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج أنها متقاربة

4) احسب المجموع : $S = \sum_{k=0}^{k=n-1} v_k^3$ و الجداء : $\prod_{k=0}^{k=n-1} v_k$

التمرين (38) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1} \end{cases}$$

1/ لتكن الدالة f ذات المتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = \dfrac{8x-6}{x+1}$

أ) ادرس تغيرات الدالة f وارسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ثم استعمل المنحني (C_f) لرسم النقاط A_1 ، A_2 ، A_3 التي فواصلها u_1 ، u_2 ، u_3 على الترتيب . ب) برهن أن $(u_n)_{n\in N}$ متناقصة تماما وأنها محدودة من الأسفل بالعدد 6

جـ) ماذا تستنتج بالنسبة للمتتالية $(u_n)_{n\in N}$.

2/ أ) اثبت المتراجحة التالية : $|u_{n+1} - 6| \prec \frac{2}{7}|u_n - 6|$

ب) استنتج من جديد أن المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ متقاربة.

3/ لتكن المتتـــــــــــــــالية (v_n) حيث : $v_n = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 1}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية . ب) احسب u_n بدلالة n ، جــ) استنتج أن (u_n) متقاربة

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

التمرين (39) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f(x)=\dfrac{2x-16}{x-6}$

1/ أ-ادرس تغيرات الدالة f وارسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ وحدة الطول : $2cm$

ب- باستعمال الرسم السابق أنشئ على محور الفواصل النقط A_0 ، A_1 ، A_2 و A_3 فواصلها على الترتيب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

ج- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ وتقاربها.

2/ $(u_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\dfrac{2u_n-16}{u_n-6}$

أ- اثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

ب- اثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 4 وماذا تستنتج ؟

3/ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n=\dfrac{1}{u_n-4}$

أ) اثبت أن (v_n) متتالية حسابية .

ب) اكتب v_n ثم u_n بدلالـــــــــــة n . جـ) أوجد نهاية(u_n)

التمرين (40) α عدد حقيقي حيث : $0\prec\alpha\prec\dfrac{\pi}{4}$. $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_1=1+\dfrac{1}{2\sin^2(\alpha)}$ و $u_{n+1}=u_n.\cos(2\alpha)+1$ لكل عدد طبيعي n غير معدوم.

1/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_n\succ1$

2/ نضع من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $v_n=u_n-\dfrac{1}{2\sin^2(\alpha)}$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية واكتب u_n بدلالة n و α

ب) هل المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة ؟ علل جوابك

3/ نضع : $S_n=u_1+u_2+........+u_n$. احسب S_n بدلالة n و α ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

التمرين (41) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$\begin{cases} u_0=\dfrac{3}{2} \\ u_{n+1}=(u_n-1)^2+1 \end{cases}$$

1) أ- أثبت بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $1\leq u_n\leq\dfrac{3}{2}$

ب-أدرس اتجاه تغير (u_n) ثم استنتج أن (u_n) متقاربة و احسب نهايتها .

2) أ-نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=e^{v_n}+1$ بين ان (v_n) متتالية هندسية ،

ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$. ب- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k v_k$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

متتاليات تراجعية من أشكال أخرى

التمرين (42) $(u_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=\frac{5}{2}$ و $u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+n^2)$

1/ نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي : $v_n=u_n-\left(\frac{n^2-3n+3}{2}\right)$

أ) برهن ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) احسب v_n ثم u_n بدلالة n ثم ادرس تقارب (u_n)

2/ برهن بالتراجع أن لكل عدد طبيعي n : $1^2+2^2+........+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3/ استنتج المجموع $S_n=u_0+u_1+........+u_n$ بدلالة n

التمرين (43) المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ معرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{2}$ وبعلاقة التراجع الآتية :

$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}$ من أجل كل عدد طبيعي n

1/ احسب u_1 ، u_2

2/ نضع : $v_n=u_n+\alpha n$ حيث α عدد حقيقي

- أوجد العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية .

3/ لتكن المتتالية العددية (t_n) المعرفة بـــ : $t_n=u_n-\frac{2}{3}n$

أ- أثبت أن المتتالية (t_n) هندسية ، يطلب حساب حدها الأول و أساسها

ب- احسب t_n ثم u_n بدلالة n

4/ احسب المجموع S_n حيث : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k$

التمرين (44) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ بحيث : $u_0=20$ ، $u_1=6$

$u_{n+1}=\frac{-1}{20}u_n+\frac{1}{20}u_{n-1}$

1/ بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية وان المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ هندسية يطلب تعيين الأساس والحد الأول لكل منهما بحيث : $v_n=u_{n+1}+\frac{1}{4}u_n$ و $w_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$ لكل n من N

2/ أ- اكتب كلا من v_n و w_n بدلالة n . ب- استنتج u_n بدلالة n و احسب $\lim u_n$.

3/ احسب $S_n=u_0+u_1+........+u_n$ بدلالة n واستنتج $\lim S_n$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (45) $(u_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \ ، \ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$

1/ لنعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على N حيث : $w_n = u_{n+1} - 9u_n$

– أثبت أن (w_n) متتالية ثابتة يطلب تعيين قيمتها واستنتج أن : $u_{n+1} = 9u_n + 1$

2/ لنعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي : $v_n = u_{n+1} - u_n$

أ) برهن أن $(v_n)_{n\in N}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) استنتج u_n بدلالة n وبرهن بالتراجع أن : u_n عدد طبيعي

3/ احسب العددين : S_n و S'_n حيث : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ و $S'_n = \sum_{r=0}^{r=n} v_r^2$

المتتاليات المتجاورة

التمرين (46) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان كما يلي : $u_n = \frac{-2}{n}$ ، $V_n = \frac{1}{lnn}$ ، $n > 1$

1 – ادرس اتجاه تغير كل من (u_n) و (v_n) .

2 – احسب $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$ .3 – هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟

التمرين (47) المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان كما يلي :

$u_0 = -1$ ، $v_0 = 2$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$ ، $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \prec v_n$

2) برهن ان المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

3) لتكن المتتالية (ω_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $\omega_n = u_n + \frac{5}{2}v_n$

أ– بين أن المتتالية (ω_n) ثابتة . ماهي نهايتها

ب– استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n)

4) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $x_n = u_n + av_n$ و $y_n = u_n + bv_n$ حيث a و b عددين حقيقيين متمايزين .

أ– جد a و b حيث تكون المتتاليتان (x_n) و (y_n) هندسيتين ثم عبر عن u_n و v_n بدلالة n

ب– جد النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n) .

التمرين (48) (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان بـــ : $U_n = Ln(n), V_n = Ln(n+1)$ و $n > 0$.

1 – ادرس اتجاه تغير كل من (u_n) و (v_n) .

2– احسب $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$.– هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان؟ .

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (49) (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان بـ:

$$\begin{cases} V_0 = 4 \\ V_{n+1} = \dfrac{V_n + U_{n+1}}{2} \end{cases} \quad ، \quad \begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{V_n + U_n}{2} \end{cases}$$

1/ احسب : U_1 وV_1 و U_2 وV_2

2/ لتكن المتتالية (W_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $W_n = V_n - U_n$

أ) برهن أن (W_n) متتالية هندسية . ب) عبر عن W_n بدلالة n

3/ ادرس اتجاه كل من (U_n) و (V_n) ثم برهن أنهما متجاورتان

4/ لنفرض المتتالية (T_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $T_n = \dfrac{U_n + 2V_n}{3}$

أ) برهن أن المتتالية (T_n) ثابتة . ب) استنتج U_n و V_n بدلالة n

ج) احسب نهاية كل منهما بطريقتين

التمرين (50) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n} \end{cases}$

1/ ادرس تغيرات الدالة f حيث : $f(x) = \sqrt{6-x}$ وحدد $f([0,6])$

2/ بين أن $0 \le u_n \le 6$ لكل عدد طبيعي n.

3/ نضع : $v_n = u_{2n}$ و $w_n = u_{2n+1}$.

– بين أن $v_n \le w_n$ (لكل عدد طبيعي n) و أن (v_n) متزايدة و (w_n) متناقصة

4/ بين أن $\left|u_{n+1} - 2\right| \le \frac{1}{2}\left|u_n - 2\right|$ (لكل عدد طبيعي n) واستنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$

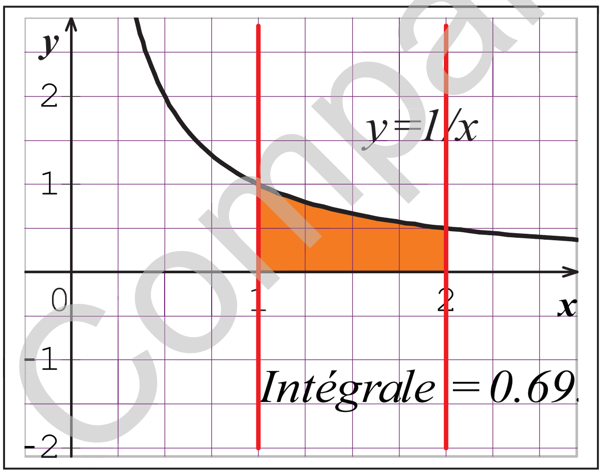
5/ بين أن (v_n) و (w_n) متجاورتان وحدد نهايتهما المشتركة

التمرين (51) **الجزء الأول** . (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان بـ:

$U_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots + \dfrac{1}{2n}$ و

$V_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dots\dots\dots + \dfrac{1}{2n-1}$

1) برهن ان المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.



الجزء الثاني .

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ حيث أن : $f(x) = \ln(x)$.

1– أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$ لدينا : $1 - \dfrac{1}{x} \le \ln(x) \le x - 1$.

2 – أثبت $U_n \le \ln(2) \le U_n + \dfrac{1}{2n}$. 3– أثبت أن (U_n) تتقارب نحو $\ln(2)$.

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

{ التدريب على حل تمارين بكالوريات }

التمرين (01) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+2$ و $u_0=\frac{5}{2}$

1) أ- ارسم في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ و المنحني

(d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\frac{2}{3}x+2$

ب- باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4

جـ - ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le 6$

ب- تحقق أن (u_n) متزايدة

جـ - هل (u_n) متقاربة ؟ برر إجابتك.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-6$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

التمرين (02) 1) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1,2]$ بالعبارة : $f(x)=\frac{x+2}{-x+4}$.

أ- بين أن الدالة f متزايدة تماما على I .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، $f(x)$ ينتمي إلى I .

2) (u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي : $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=1+\dfrac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$

ب- عين النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

التمرين (03) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[1;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=3+\sqrt{x-1}$.

يرمز (C) إلى منحنى f في المستوي المزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

(الوحدة على المحورين $2cm$)

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

1) احسب $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ و فسر النتيجة هندسيا.

– ادرس تغيرات الدالة f .

– باستعمال منحني دالة " الجذر التربيعي " ، أنشئ المنحني (C)

– ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته : $y = x$.

2) نعرف المتتالية (U_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالأتي : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

أ– باستعمال (D) و (C) مثل الحدود U_0 ، U_2 ، U_3 على محور الفواصل

ب– ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها .

3) أ– برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2 \le U_n \le 5$ و $U_{n+1} \succ U_n$

ب– استنتج أن (U_n) متقاربة . احسب $\lim_{n \to +\infty} U_n$

التمرين (04)

(U_n) المتتالية المعرفة بحده الأول $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1$

1– احسب U_1 ، U_2 و U_3.

2– (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ : $V_n = U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

– برهن بالتراجع أن (V_n) متتالية ثابتة .

– استنتج عبارة U_n بدلالة n

– احسب $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

3– (W_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ : $W_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

– احسب المجموع S حيث : $S = W_0 + W_1 + W_2 + ... + W_n$

التمرين (05) 1) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي : $f(x) = \frac{x^2+5}{x+2}$

C_f منحني f في المستوي المنسوب لمعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (وحدة الأطوال $2cm$)

أ– احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .

ب– ادرس اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها.

جـــ – بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 2$ مقارب للمنحني C_f ثم ارسم C_f و (D).

د– بيّن أن صورة المجال $\left[1;\frac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1;\frac{5}{2}\right]$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

2) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بحدها الأول $U_0 = 1$ و من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $U_{n+1} = f(U_n)$.

أ- باستخدام C_f و المستقيم ذي المعادلة $y = x$ ، مثل U_0 و U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل (ox) .

ب- خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية (U_n) .

جـــ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 \leq U_n \leq \frac{5}{2}$ و أن المتتالية (U_n) متزايدة.

د-استنتج أن (U_n) متقاربة و احسب $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

التمرين (06) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;2]$ كما يأتي : $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

1/ أ- ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;2]$.

ب- أنشئ (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

(الوحدة على المحورين $4cm$)

ج- برهن أنه إذا كان $x \in [0;2]$ فإن $f(x) \in [0;2]$.

2/ نعرف المتتالية العددية (U_n) على $\mathbb{N}$ كالأتي : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

أ- برر وجود المتتالية (U_n) . احسب الحدين U_1 و U_2

ب- مثل الحدود U_0 و U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل و ذلك بالاستعانة بالمنحني (C) و المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$.

ج- ضع تخمينا حول اتجاه تغير (U_n) وتقاربها انطلاقا من التمثيل السابق .

3/ أ- برهن بالتراجع على العدد الطبيعي n أن : $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$.

ب- برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن : $U_{n+1} \succ U_n$.

ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (U_n) ؟

ج- تحقق أن : $U_{n+1} - \sqrt{3} \leq \frac{2-\sqrt{3}}{U_n + 2}\left(U_n - \sqrt{3}\right)$ من أجل عدد طبيعي n غير معدوم .

عيّن عددا حقيقيا k من $]0;1[$ بحيث : $\left|U_{n+1} - \sqrt{3}\right| \leq k \left|U_n - \sqrt{3}\right|$

بيّن أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $\left|U_n - \sqrt{3}\right| \leq k^n \left|U_0 - \sqrt{3}\right|$

استنتج $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

إعداد الأستاذ
حيلات عمار

التمرين (07) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n} \end{cases}$

1- أحسب u_1

2- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 < u_n < 4$

ب) بين أن (u_n) متزايدة ، ماذا تستنتج ؟

3- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية

ب) أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4- أحسب بدلالة n كلا من : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$

التمرين (08) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية عددية حدودها موجبة معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = e^2 \\ (u_{n+1})^2 . e = u_n \end{cases}$$

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة كما يلي : $v_n = \dfrac{1+\ln u_n}{2}$

1/ أثبت أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

2/ اكتب v_n ثم u_n بدلالة n . 3/ ادرس تقارب المتتالية (u_n)

4/ احسب المجموع S بدلالة n حيث : $S = u_1 + u_2 + ... + u_n$

5/ ما هي طبيعة المتتالية (t_n) حيث : $t_n = \ln u_n$

التمرين (09) لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1) أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2) أحسب w_n بدلالة n .ما هي نهاية (w_n)؟

3) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة . ما هي نهاية (t_n)؟

4) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.ثم استنتج نهاية u_n و نهاية v_n.

التمرين (10) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N^*}$ المعرفة كما يلي :

$$u_1 = -1$$
$$u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$$

1/ برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3

2/ ادرس رتابة المتتالية (u_n) . استنتج أن (u_n) متقاربة احسب نهايتها

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

3/ نضـــع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $v_n=n(3-u_n)$

أ) برهن ان المتتالية (v_n) هندسية

ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم جد نهاية المتتالية (u_n) من جديد

4/ احسب المجموعين : $S_1=v_1+v_2+.......+v_n$ و $S_2=v_1^2+v_2^2+.........+v_n^2$

التمرين (11) **1-** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدودها موجبة حيث :

$$\ln u_1+\ln u_5=-12 \quad \text{و} \quad \ln u_2-\ln u_4=4$$

– عيّن أساس هذه المتتالية الهندسية وحدها u_0 . احسب u_n بدلالة n

– نسمي S_n المجموع : $u_0+u_1+.......+u_n$. احسب S_n بدلالة n ثم $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

2- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $v_n=\ln u_n+\ln u_{n+1}$

– بيّن أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

– نسمي T_n المجموع : $v_0+v_1+........+v_n$. عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون : $T_n{}^2=2^{30}$

التمرين (12) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=e^3-1$ و من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $e^3u_{n+1}=1-e^3+u_n$.

1- احسب الحدود : u_1 و u_2 و u_3

2- أثبت أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن : $1+u_n\succ 0$

3- استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .ماذا تستنتج بخصوص تقارب (u_n)؟

4- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=2(1+u_n)$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب- احسب u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

ج- عين مجموعة العداد الطبيعية n حتى يكون : $v_n\geq 2\times 10^{-9}$

التمرين (13) المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ معرفة بحدها الأول u_0 وبعلاقة التراجع الآتية :

$u_{n+1}=\dfrac{7u_n+2}{u_n+8}$ من أجل كل عدد طبيعي n

1) عيّن قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2) نفرض في ما يلي : $u_0=0$

أ) احسب u_1,u_2 ثم أثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0\leq u_n\leq 1$

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج تقارب المتتالية (u_n) واحسب نهايتها.

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n=\dfrac{u_n+2}{u_n-1}$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب حساب حدها الأول و أساسها.

ب) عبّر عن u_n بدلالة n ثم احسب نهاية (u_n)

جـ) احسب كلا من S_n وَ P_n إذا علمت أن :

$$S_n=v_0+v_1+.......+v_n \quad \text{و} \quad P_n=v_0\times v_1\times.........\times v_n$$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (14) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي :

$u_0=1$ ، $u_1=2$ ولكل عدد طبيعي n ، $u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$

1- احسب الحدين u_3 ، u_4

2- لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n=2^n v_n$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}-v_n=3$

ب- استنتج طبيعة المتتالية (v_n) ثم اكتب v_n بدلالة n

ج- استنتج u_n بدلالة n .

3- نريد دراسة تقارب المتتالية (u_n)

أ- برهن أنه لكل عدد طبيعي n ($n\geq 3$) : $4\times 2^n\geq n^2$ و $\frac{n}{2^n}\leq\frac{4}{n}$

ب- احسب عندئذ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2^n}$ ، هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

التمرين (15) **I)** نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=e^{-x}+x-1$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) احسب $g(0)$ ثم استنتج أن : $e^{-x}+x\geq 1$ لكل $x\in\mathbb{R}$

II) لتكن الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{x}{x+e^{-x}}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1)عيّن مجموعة تعريف الدالة f

1) بيّن أن : $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}$ لكل $x\in\mathbb{R}^*$.

2) بيّن ان : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ ثم فسّر هندسيا النتيجة.

3) ادرس تغيرات الدالة f

4) أ) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) في النقطة O .

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المماس (Δ). جـ) أنشئ (Δ) و (C_f) .

III) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة كما يلي :

$U_0=1$ و $U_{n+1}=f(U_n)$ لكل $n\in\mathbb{N}$

1)بيّن بالتراجع أن : $0\leq U_n\leq 1$ لكل $n\in\mathbb{N}$

2) بيّن أن المتتالية (U_n) متناقصة

3) استنتج ان (U_n) متقاربة ثم حدّد نهايتها.

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (16) I) لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{x}+1}$ و (C) هو المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

1) أ – تحقق من أن : $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^{x}+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب – استنتج أن f فردية

2) احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) أ– بين أن : $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب– أعط جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^{+}$

ج – استنتج ان : $1-\frac{2}{e^{x}+1}\leq\frac{1}{2}x$ لكل x من $\mathbb{R}$.

4) بيّن ان : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right]=0$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

5) أنشئ في المعلم المستقيم الذي معادلته : $y=1-\frac{1}{2}x$ ثم أنشئ المنحني (C)

II) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=1-\frac{2}{e^{u_n}+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) بين بالتراجع أن : $u_n\succ 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

2) أ– تحقق باستعمال نتيجة السؤال الثالث ج من الجزء الأول ، أن : $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب– استنتج ان المتتالية (u_n) متناقصة .

3) بيّن أن : $u_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

التمرين (17)

نعرّف متتالية (u_n) على المجموعة N بــ : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد n ، $u_n-2u_{n+1}=2n+3$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2^{-n}-2n+1$

2. (v_n) متتالية معرفة على N بــ : $v_n=u_n+tn-1$.

أ ــ بيّن أنّه إذا كان $t\neq 2$ ، فإن المتتالية (v_n) تكون متباعدة .

ب ــ أثبت أنّه يوجد عدد طبيعي t ؛ تكون من أجله المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها

جــ ــ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=v_0+v_1+...+v_n$

3. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A ، B ، C و G حيث :

$2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ مع λ عدد حقيقي.

عيّن λ حتى تكون النقطة G مرجحا للنقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات S_0 ، S_1 و S_2 على الترتيب

التمرين (18) 1 تعيين حصر للعدد e^x .

1) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=e^x-(1+x)$.
أدرس تغيرات الدالة f .

2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $1+x\le e^x \dots (1)$.

3) باستعمال المتباينة (1) ، أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x أصغر تماما من 1 $(x<1)$:

$$e^x\le\frac{1}{1-x}\quad\dots\ (2)$$

2. تعيين حصر للعدد e . n عدد طبيعي غير معدوم .

1) باستعمال المتباينة (1) ، أثبت أن : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le e$.

2) باستعمال المتباينة (2) ، أثبت أن : $e\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

3. e نهاية متتالية.

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، كما يلي :

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $0\le e-u_n\le\frac{3}{n}$.

2) أثبت أن المتتالية (u_n) تتقارب نحو e .

الهدية

هذه مجموعة توجيهات أضعها بين أيديكم يا طلبتنا الكرام

1/ ضروري المزيد من شحذ الهمة و التوق للالتحاق بمدرجات الجامعة

2/ ضروري ضبط جدول وعمل منظم بقصد الاستغلال الجيد للفترة المتبقية للمراجعة ولها أهميتها إن أحسن استغلالها

3/ الجدول يكون متوازن وعدم إهمال مواد او تركها بحجة من الحجج

4/ الاستعانة بحل النماذج السابقة في كل مادة

5/ ضبط كراس التلخيص او المعارف في كل مادة

6/ الابتعاد عن الزملاء ذوي العزائم الضعيفة

7/ كن صاحب أمل وثقة في الله و أسأله العون وأعلم دراستك بنية حسنة هي عبادة وهي من بر الوالدين لأن إدخال السرور عليهما امر مشهود له فكيف بنجاحك في شهادة البكالوريا

8/ أعلم أن النجاح في البكالوريا امتحان والامتحان تكون 80 بالمئة من أسئلته مناسبة لعموم الطلبة و الالتحاق بالتخصص المرغوب فيه مسابقة

9/ عدم إهمال اللغات الأجنبية لأن لها تأثير كبير على النجاح ونوعه وعلى الأقل التخفيف من حدة الضعف

10/ ابتعد عن السهر المفرط واجتهد في البكور فإن فيه البركات ومشهود له في المأثور

http://www.qahtaan.com/works/up/get.php?hash=23470iktwx1238443920 يتبع ...

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

سلسلة استعد للبكالوريا رقم (01)

المستوى : ثالثة ثانوي — السنة الدراسية :2008/2007

الشعبـــــة : علوم تجريبية + رياضيات

و تقني رياضي

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

المحور : المتتاليات العددية والاستدلال بالتراجع

التمرين (01) : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$u_1 = 1 \quad ، \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n{}^2 - 2u_n + 4)$$

1/ احسب u_2 و u_3 . 2/ بيّن أن المتتالية (u_n) متـــــزايدة .

3/ بيّن أن : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 1)^2 + \frac{3}{2}$ ثم برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2

4/ استنتج أن (u_n) متقاربة واحسب نهايتها

التمرين (02) : : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

1 / برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $0 \leq u_n \leq 2$.

2/ بيّن أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متـــــزايدة و ماذا تستنتج ؟

3/ أ- بيّن أن : $2 - u_{n+1} \prec \frac{2 - u_n}{2}$

ب- بيّن أن : $0 \prec 2 - u_n \prec \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ثم استنتج $\lim u_n$

التمرين (03) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases}$$

1/بيّن انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \succ 2$

2/ ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ واستنتج أن $(u_n)_{n\in N}$ متقاربة واحسب $\lim u_n$

3/ لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على N كما يلي : $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$

أ- بيّن أن المتتالية (v_n)حسابية حدد أساسها وحدها الأول

ب- احسب نهاية المتتالية (u_n) بطريقة أخرى .

التمرين (04) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{\pi}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{u_n}{2} \end{cases}$$

1/ نضــــع : $v_n = u_n - \dfrac{\pi}{6}$

أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب)عبر عن (v_n) ثم عن (u_n) بدلالة n

2/ احسب نهاية (u_n)

3/ احسب المجموعين S_1 و S_2 حيث : $S_2 = \sum_{r=1}^{r=n} u_r$ ، $S_1 = \sum_{k=1}^{k=n} v_k$

التمرين (05) لتكن المتتالية(U_n) و (V_n) المتتالية المعرفتين كما يلي :
$$\begin{cases} V_0 = 4 \\ V_{n+1} = \dfrac{V_n + U_{n+1}}{2} \end{cases} \quad ، \quad \begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{V_n + U_n}{2} \end{cases}$$

1/ احسب : U_1 وV_1 و U_2 وV_2

2/ لتكن المتتالية (W_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بــــ: $W_n = V_n - U_n$

أ) برهن أن (W_n) متتالية هندسية . ب) عبر عن W_n بدلالة n

3/ ادرس اتجاه كل من (U_n) و (V_n) ثم برهن أنهما متجاورتان

4/ لنفرض المتتالية (T_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بــــ: $T_n = \dfrac{U_n + 2V_n}{3}$

أ) بــرهن أن المتتالية (T_n) ثابتة . ب) استنتج U_n و V_n بدلالة n

ب)احسب نهاية كل منهما بطريقتين

التمرين (06) :نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N^*}$ المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)}u_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$$

1/ برهن أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 3

2/ ادرس رتابة المتتالية (u_n) . استنتج أن (u_n) متقاربة احسب نهايتها

3/ نضــع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $v_n = n(3 - u_n)$

أ) برهن ان المتتالية (v_n) هندسية

ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

جـ) جد نهاية المتتالية u_n من جديد

4/ احسب المجموعين : $S_1 = v_1 + v_2 + ...+ v_n$ و $S_2 = v_1^2 + v_2^2 + ...+ v_n^2$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (07)

نعرّف متتالية (u_n) على المجموعة N بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد n ، $u_n - 2u_{n+1} = 2n+3$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$

2. (v_n) متتالية معرفة N على بـ : $v_n = u_n + tn - 1$.

أ ـــ بيّن أنّه إذا كان $t \neq 2$ ، فإن المتتالية (v_n) تكون متباعدة .

ب ـــ أثبت أنّه يوجد عدد طبيعي t ؛ تكون من أجله المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول .

جـ ـــ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$

3. في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A ، B ، C و G حيث : $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + \lambda\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ مع λ عدد حقيقي.

عيّن λ حتى تكون النقطة G مرجحًا للنقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات S_0 ، S_1 و S_2 على الترتيب

التمرين (08)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي :
$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1} \end{cases}$$

1/ لتكن الدالة f ذات المتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = \dfrac{8x-6}{x+1}$

أ) ادرس تغيرات الدالة f وارسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ثم استعمل المنحني (C_f) لرسم النقاط A_1 ، A_2 ، A_3 التي فواصلها u_1 ، u_2 ، u_3 على الترتيب . ب) برهن أن $(u_n)_{n\in N}$ متناقصة تماما و أنها محدودة من الأسفل بالعدد 6

جـ) ماذا تستنتج بالنسبة للمتتالية $(u_n)_{n\in N}$.

2/ أ) اثبت المتراجحة التالية : $|u_{n+1} - 6| \prec \dfrac{2}{7}|u_n - 6|$

ب) استنتج من جديد أن المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ متقاربة.

3/ لتكن المتتالية (v_n) حيث : $v_n = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 1}$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية . ب) احسب u_n بدلالة n

جـ) استنتج أن (u_n) متقاربة

التمرين (09)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \dfrac{u_n^3}{3u_n^2 + 1}$ لكل n من N

1/ أ- بيّن أن $u_n \succ 0$ لكل n من N . ب- بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة و ماذا تستنتج؟

2/ أ- بيّن أن $u_{n+1} \prec \frac{1}{3}u_n$ لكل n من N

ب- استنتج أن : $u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ لكل n من N ثم احسب $\lim u_n$

التمرين (10): لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 \in [0,1]$ و $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$

1)بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 1$

2)أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة – أستنتج أنها تقبل نهاية يطلب حسابها

3)نضع : $u_0 = \cos(\theta)$ / $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

أ)برهن بالتراجع أن : $u_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$. ب) أحسب نهاية (u_n)

التمرين (11): المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و $4u_{n+1} = u_n - 4$

1/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3u_n + 4 \ge 0$

2/ برهن أن المتتالية(u_n) متناقصة تماما وماذا تستنتج ؟

3/ (v_n) متتالية عددية معرفة بـــ : $v_n = 3u_n + \alpha$

أ- عين العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية – عين أساسها وحدها الأول

ب – أحسب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج أنها متقاربة

4) احسب المجموع : $S = \sum_{k=0}^{k=n-1} v_k^3$ و الجداء : $\prod_{k=0}^{k=n-1} v_k$

التمرين (12): $(u_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{-7u_n - 8}{2u_n + 1}$

1) أحسب: u_1, u_2 2) أثبت أن: $u_n \neq -2$ لكل عدد طبيعي n

3) لتكن المتتالية العددية (t_n) المعرفة كما يلي: $t_n = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

أ) أحسب الحدود: t_0 ، t_1 ، t_2

ب) أثبت أن(t_n) متتالية حسابية يطلب تعيين الأساس.

جـ) أحسب t_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n و احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$

4) عين الأعداد الطبيعية n حتى يكون u_n عدد صحيح.

التمرين (13): $(u)_{n\in N^*}$ متتالية هندسية متناقصة حيث :

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 84 \quad \text{و} \quad u_1 \times u_2 \times u_3 = 64$$

1/ احسب الحدود : u_2 ثم u_1, u_3 والأساس r للمتتالية .

2/ عبّر عن u_n بدلالة n و ادرس تقارب المتتالية $(u)_{n\in N^*}$

3/ احسب بدلالة n المجموع S حيث : $S = u_1 + u_2 + ...u_n$ و $\lim_{n\to+\infty} S$

4/ احسب بدلالة n المجموع S' حيث : $S' = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_n}$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (14): $(u_n)_{n\in N^*}$ متتالية هندسية حدودها موجبة بحيث : $u_1=1$ و $u_3+u_5=20$

1 – أوجد أساس هذه المتتالية وحدد اتجاه تغيرها

2– احسب بدلالة n المجموع : $u_1+u_2+.......+u_n$

لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n=3.u_n^2+2.3^n$

3– احسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n=v_1+v_2+.....+v_n$

التمرين (15) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة بـــ

$u_0=1$ و $u_{n+1}=1+\dfrac{1}{1+u_n}$ لكل عدد طبيعي n

1/ احسب u_1 ، u_2 و u_3 .

2/ بيّن أنه لكل عدد طبيعي n ، $1\le u_n\le\dfrac{3}{2}$

3/ اثبت انه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $|u_{n+1}-u_n|\le\dfrac{1}{4}|u_n-u_{n-1}|$

4/ نعتبر المتتاليتين العدديتين (x_n) و (y_n) المعرفتين كما يلي : $x_n=u_{2n}$ و $y_n=u_{2n+1}$ لكل $n\in N$

أ– بيّن انه لكل عدد طبيعي n ، $y_n=1+\dfrac{1}{1+x_n}$

ب– بيّن انه $x_n\le y_n$ لكل $n\in N$

جــ– ادرس اتجاه كل من (x_n) و (y_n) ثم برهن أنهما متجاورتان يطلب تحديد نهايتهما

5/ بين انه : $|u_{n+1}-\sqrt{2}|\le\dfrac{1}{4}|u_n-\sqrt{2}|$ لكل $n\in N$ واستنتج نهاية (u_n)

التمرين (16) المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ معرفة بحدها الأول u_0 وبعلاقة التراجع الآتية :

$u_{n+1}=\dfrac{7u_n+2}{u_n+8}$ من أجل كل عدد طبيعي n

1) عيّن قيم u_0 التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

2) نفرض : $u_0=0$

أ) احسب u_1,u_2 ثم أثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0\le u_n\le1$

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

جـــ) ادرس تقارب المتتالية (u_n) واحسب نهايتها

3) لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n=\dfrac{u_n+2}{u_n-1}$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب حساب حدها الأول و أساسها.

ب)عبّر عن u_n بدلالة n ثم احسب نهاية (u_n)

جــ) احسب كلا من S_n وَ P_n إذا علمت أن :

$S_n=v_0+v_1+.......+v_n$ و $P_n=v_0\times v_1\times.........\times v_n$

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (17) المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ معرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{2}$ وبعلاقة التراجع الآتية :

$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{3}n+\frac{2}{3}$ من أجل كل عدد طبيعي n

1/ احسب u_1 ، u_2

2/ نضع : $v_n=u_n+\alpha.n$ حيث α عدد حقيقي

– أوجد العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية .

3/ لتكن المتتالية العددية (t) المعرفة بـــ : $t_n=u_n-\frac{2}{3}n$

أ– أثبت أن المتتالية (t) هندسية ، يطلب حساب حدها الأول و أساسها

ب– احسب t_n ثم u_n بدلالة n

4/ احسب المجموع S_n حيث : $S_n=\sum_{k=0}^{k=1}u_k$

التمرين (18) f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي: $f(x)=\frac{2x-16}{x-6}$

1/ ادرس تغيرات الدالة f وارسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس

2 / $(u_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=\frac{2u_n-16}{u_n-6}$

– اثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 4 وماذا تستنتج ؟

3/ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n=\frac{1}{u_n-4}$

أ) اثبت أن (v_n) متتالية حسابية . ب) اكتب v_n ثم u_n بدلالـــــــــــــة n . جــ) أوجد نهاية(u_n)

التمرين (19) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in N}$ بحيث :

$$\begin{cases} u_0=20 \quad ، \quad u_1=6 \\ u_{n+1}=\frac{-1}{20}u_n+\frac{1}{20}u_{n-1} \end{cases}$$

1/ بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية وان المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ هندسية يطلب تعيين الأساس والحد الأول

لكل منهما بحيث : $v_n=u_{n+1}+\frac{1}{4}u_n$ و $w_n=u_{n+1}-\frac{1}{5}u_n$ لكل n من N

2/ أ– اكتب كلا من v_n و w_n بدلالة n . ب– استنتج u_n بدلالة n و احسب $\lim u_n$.

3/ احسب $S_n=u_0+u_1+........+u_n$ بدلالة n واستنتج $\lim S_n$

التمرين (20) $(u_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0=\frac{5}{2}$ و $u_{n+1}=\frac{1}{3}(u_n+n^2)$ لكل n من N

1/ نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي : $v_n=u_n-\left(\frac{n^2-3n+3}{2}\right)$

أ) برهن ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) احسب v_n ثم u_n بدلالة n ثم ادرس تقارب (u_n)

2/ برهن بالتراجع أن لكل عدد طبيعي n : $1^2+2^2+........+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3/ استنتج المجموع $S_n=u_0+u_1+........+u_n$ بدلالة n

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (21) 1/ (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0=5$ و أساسها 4.

– أكتب الحد العام u_n بدلالة n – احسب المجموع: $u_0+u_1+........+u_n$

إذا كان مجموع سبعة حدود متعاقبة من هذه المتتالية هو1995 .فما هو الحد الأول من هذه الحدود .

2/ $(v_n)_{n\in N}$ متتـــالية عــــــــددية حيـث: $v_0=32$ و $v_n=(2n+1).2^{u_n}$

– برهن بالتراجع أن : $1\times3\times5\times.........\times(2n+1)=\dfrac{(2n+1)!}{2^n\,n!}$

– استنتج الجداء : $u_0\times u_1\times......\times u_n$

التمرين (22) $(u_n)_{n\in N}$ متتالية عددية معرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0=0 \ ، \ u_1=1 \\ u_{n+2}=10u_{n+1}-9u_n \end{cases}$

1/ لنعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على N حيث : $w_n=u_{n+1}-9u_n$

– أثبت أن (w_n) متتالية ثابتة يطلب تعيين قيمتها واستنتج أن : $u_{n+1}=9u_n+1$

2/ لنعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in N}$ المعرفة كما يلي : $v_n=u_{n+1}-u_n$

أ) برهن أن $(v_n)_{n\in N}$ متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) استنتج u_n بدلالة n وبرهن بالتراجع أن : u_n عدد طبيعي

3/ احسب العددين: S_n و S'_n حيث : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k$ و $S'_n=\sum_{r=0}^{r=n}v_r^2$

التمرين (23) α عدد حقيقي حيث : $0\prec\alpha\prec\dfrac{\pi}{4}$. $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_1=1+\dfrac{1}{2\sin^2(\alpha)}$ و $u_{n+1}=u_n.\cos(2\alpha)+1$ لكل عدد طبيعي n غير معدوم.

1/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $u_n\succ1$

2/ نضع من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $v_n=u_n-\dfrac{1}{2\sin^2(\alpha)}$

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية واكتب u_n بدلالة n و α

ب) هل المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة ؟ علل جوابك

3/ نضع : $S_n=u_1+u_2+........+u_n$. احسب S_n بدلالة n و α ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

التمرين (24) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ المعــــــــــرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\sqrt{6-u_n} \end{cases}$

1/ ادرس تغيرات الدالة f حيث : $f(x)=\sqrt{6-x}$ وحدد $f([0,6])$

2/ بين أن $0\leq u_n\leq6$ لكل عدد طبيعي n.

3/ نضع : $v_n=u_{2n}$ و $w_n=u_{2n+1}$.

– بين أن $v_n\leq w_n$ (لكل عدد طبيعي n) و أن (v_n) متزايدة و (w_n) متناقصة

4/ بين أن $|u_{n+1}-2|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-2|$ (لكل عدد طبيعي n)واستنتج أن (u_n) متقاربة واحسب $\lim u_n$

5/ بين أن (v_n) و (w_n) متجاورتان وحدد نهايتهما المشتركة.

التمرين (25) برهن بالتراجع أن :

1) لكل عدد طبيعي n غير معدوم

$$(1\times 2^0)+(2\times 2^1)+(3\times 2^2)+..........+(n\times 2^{n-1})=1+(n-1).2^n$$

2) لكل عدد طبيعي n ، $1-3+5-7+..........+(-1)^n.(2n+1)=(-1)^n.(n+1)$

3) لكل عدد طبيعي n ، $1+2^3+3^3+..........+n^3=\frac{1}{4}.n^2.(n+1)^2$

التمرين (26) برهن بالتراجع أن :

1) لكل عدد طبيعي n غير معدوم ، العدد $3\times 5^{2n-1}+2^{3n-2}$ يقبل القسمة على 17.

2) لكل عدد طبيعي n ، العدد $3n^3+6n$ مضاعف للعدد 9

– استنتج أن مجموع مكعبات ثلاثة أعداد طبيعية متعاقبة يقبل القسمة على 9.

3) لكل عدد طبيعي n ، العدد $2^{6n+5}+4\times 5^{2n+1}$ يقبل القسمة على 13.

التمرين (27) f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $f_1=f$ و $f_{n+1}=f_n\circ f$

1/ احسب كلا من : $f_2(x)$ و $f_3(x)$ و $f_4(x)$

2/ أعط تخمينا لعبارة $f_n(x)$

3/ برهن بالتراجع التخمين الموضوع سابقا ، ثم استنتج عبارة $f_n(x)$

التمرين (28) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ المعـــــــــــــــرفة كما يلي : $u_0=7$ و $u_{n+1}=2u_n-3$

1/ احسب : u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 ثم أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n

2/ برهن بالتراجع التخمين الموضوع سابقا ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

3/ f دالة تآلفية معرفة كما يلي : $f(x)=2x-3$

أ) أوجد العدد الحقيقي α الصامد بالدالة f

ب) (v_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $v_n=u_n-\alpha$. عيّن طبيعة المتتالية (v_n)

جـ) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

النجاح مطلب الجميع وتحقيق النجاح الدراسي يعتبر من أولويات الأهداف لدى الطالب ..ولكل نجاح مفتاح وفلسفة وخطوات ينبغي الاهتمام بها ...ولذلك أصبح النجاح علما و هندسة..

النجاح فكرا يبدأ وشعورا يدفع ويحفز وعملا وصبرا يترجم ..وهو في الأخير رحلة..

الهدية

المفاتيح العشرة للنجاح الدراسي

1/الطموح كنز لا يفنى: لا يسعى للنجاح من لا يملك طموحا ولذلك كان الطموح هو الكنز الذي لا يفنى ..فكن طموحا وانظر إلى المعالي .. يتبع

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

سلسلة استعد للبكالوريا رقم (09)

المستوى : ثالثة ثانوي — السنة الدراسية :2009/2008

الشعبـــــة :علوم تجريبية + رياضيات

و تقني رياضي

إعداد الأستاذ
خليلات عمار

• المحاور : العد (التحليل التوفيقي) + الاحتمالات •

التحليل التوفيقي

التمرين (01) يحتوي كيس على 18كرة منها4 كرات حمراء مرقمة من1 إلى 4و6كرات بيضاء مرقمة من1الى6 و8 كرات خضراء مرقمة من1الى8.

1. نسحب من هـــذا الكيس 3كرات **في آن واحد**.ما هـــو عدد الحالات التي نحصل فيهـــا على:

أ) 3ارقام فردية ب)كرة حمراء على الأقل جــ)كرة واحدة فقط تحمل الرقم4

2. نحسب من هـــذا الكيس 3كرات على **التوالي بحيث نعيد في كل مرة** الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي.ما هو عدد الحالات التي نحصل فيها على:

أ) 3ارقام فردية ب)كرة حمراء على الأقل جــ)كرة واحدة فقط تحمل الرقم4

التمرين (02) اشترى احد التلاميذ المجتهدين 3 كتب للرياضيات وكتابين للفيزياء وأربعة كتب للأدب العربي ثم أراد أن يضعهم على رف مكتبته فما هو عدد الطرق الممكنة لتحقيق ذلك إذا :

أ) أراد وضع الكتب ذات نفس المادة متجاورة

ب) كتب الأدب العربي فقط متجاورة . ج) دون شرط .

التمرين (03) : 1/ n عدد طبيعي ، اثبت أن : $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

2/ n و m عددان طبيعيان حيث : $n \geq m$

أ- أثبت أن : $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$

ب- استنتج قيمة مبسطة للمجموع S حيث : $S = \sum_{m=0}^{m=n} mC_n^m$

التمرين (04) 1/ أوجد العدد الطبيعي n في كل حالة من الحالات التالية :

أ) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^3 = \dfrac{5n}{2} + 1$ ، ب) $C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n$

2/حل في ¥^{2} الجملة التالية : $\begin{cases} C_{x+1}^{y} = C_x^{y-1} \\ C_{x+y}^{2} = 10 \end{cases}$

إعداد الأستاذ
خليلات عمار

التمرين (05) في مركز أبحاث يراد تشكيل لجنة تضم 4 أعضاء مختارين من بين 6 باحثين و 4 باحثات. **1)** ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها؟

2) ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها في الظروف التالية:

أ) الأعضاء الأربعة المختارين باحثات؟ ب) من بين الأعضاء المختارين توجد باحثة واحدة فقط؟

جـ) من بين الأعضاء المختارين توجد على الأقل باحثة.

د) من بين الأعضاء المختارين يوجد على الأكثر باحثان

3) ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلهاإذا كانت هذه اللجنة تضم **رئيسا ونائبا له و كاتبين**

التمرين (06) n عدد طبيعي غير معدوم . نضع :

$$L_n = 9C_{n+1}^{2} + 27C_{n+1}^{3} + 81C_{n+1}^{4} + \dots\dots + 3^{n+1}C_{n+1}^{n+1}$$

1/ بيّن أن : $L_n = 4^{n+1} - 3n - 4$

2/ نضع : $S_n = L_1 + L_2 + \dots\dots + L_n$ ، **احسب** S_n **بدلالة** n

---

التمرين (07) 1/ برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$1\times 1! + 2\times 2! + \dots\dots + n\times n! = (n+1)! - 1$$

2/ برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$2^n\left[1\times 3\times 5\times 7\times \dots\dots \times (2n-1)\right] = \frac{(2n)!}{n!}$$

التمرين (08) يضم صندوق 10 كرات متماثلة . 4 منها سوداء و الباقي بيضاء . نسحب من الصندوق 3 كرات في آن واحد. ما عدد الحالات ممكنة للحصول على :

أ) كرة بيضاء ؟ ب) كرة بيضاء على الأقل ؟ جـ) 3 كرات ليست من نفس اللون ؟

2) نضيف إلى الصندوق n كرة سوداء و n كرة بيضاء و نعتبر X_n عدد الحالات الممكنة لسحب كرتين من نفس اللون .

أ) أثبت أن $X_n = n^2 + 9n + 21 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

ب) كم نضيف من كرة حتى يكون $X_n = 10713$

التمرين (09) ليكن المنشور التالي $\left(x^3 - \dfrac{2}{x^2}\right)^{15}$

1) أكتب الحد الذي درجته 10. 2) أوجد معامل الحد التاسع. 3) أوجد الحد الثابت

التمرين (10) 1) أثبت أن $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m}$ ثم استنتج أن : $C_m^m + C_{m+1}^m + \dots + C_n^m = C_{n+1}^{m+1}$

2) أحسب المجاميع التالية : $S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ ،

$S_2 = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \dots + (n-1)n$ ،

$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

حساب الاحتمال و المتغير العشوائي و الأمل الرياضي و التباين

التمرين (01) : يحتوي كيس على 10قريصات مرقمة من1إلى 10(لكل قريصتين مختلفتين رقمان مختلفان) نسحب في آن واحد 3 قريصات ونعتبر أن جميع السحبات متساوية الاحتمال

1)أحسب عدد السحاب الممكنة

2)أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها زوجية

3)أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها أعداد أولية

4)أحسب احتمال سحب 3 قريصات رقم كل واحد منها عدد غير أولي

5)أحسب احتمال سحب 3 قريصات رقم إحداها على الأقل رقم أولي

تعطى كل النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال ثم تعطى كل واحدة منها مقربة إلى $\frac{1}{100}$ بالنقصان

التمرين (02) يحتوي كيس على10كرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس،منها 3حمراء، 3 خضراء و 4 بيضاء

1)نسحب من هذا الكيس،ثلاث كرات، في آن واحد، ما احتمال الحصول على:

أ) - نفس اللون؟

ب) - الألوان الثلاثة؟

جـ)- كرة بيضاء واحدة على الأقل؟

2)نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كرات عدد الكرات البيضاء المسحوبة. أ-ما هو قانون الاحتمال المتغير العشوائي X؟

ب-احسب الأمل الرياضي $E(X)$ والتباين والانحراف المعياري .

التمرين (03) يحتوي وعاء على 4 قريصات مرقمة من 1 إلى 4.نسحب عشوائيا قريصة من هذا الوعاء ونسجل لونها رقمها a ثم نعيدها إلى الوعاء ونسحب من جديد قريصة أخرى ونسجل لونها b

ليكن $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلما متعامدا ومتجانسا في الفضاء .

نعتبر الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ حيث : $\vec{u}(a,-5,1-a)$ و $\vec{v}(1+b,1,b)$

- برهن أن احتمال أن يكون هذان الشعاعان متعامدين هو $\frac{1}{4}$

التمرين (04) يحتوي وعاء على n كرة سوداء $(n \in \mathbb{N}^*)$ و كرتين بيضاوين ، نسحب من هذا الوعاء كرتين على التوالي دون إعادة قبل السحب الموالي .

1. ماهو احتمال سحب كرتين بيضاوين؟

2. نرمز بالرمز u_n إلى احتمال سحب كرتين من نفس اللون

أ- عبر عن u_n بدلالة n . ب- احسب $\lim_{n\to+\infty} u_n$.فسر النتيجة

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (05) يحوي كيس 5 كريات تحمل الرقم 10 و 3 كريات تحمل الرقم 15 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين و ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع الرقمين المحصل عليهما .1) حدد مجموعة القيم الممكنة للمتغير X .

2) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X

3)أحسب الامل الرياضياتي $E(X)$ ثم أحسب التباين $V(X)$

4) أوجد $P(X \geq 25)$

التمرين (06) ليكن x المتغير العشوائي المعرف كمايلي :

α	-1	2	3	4
$P(X=\alpha)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	a

1) حدد قيمة العدد الحقيقي a

2) أحسب $P(X \geq \frac{5}{2})$ و $P(X < 1)$

3)أحسب $P(X^2 \leq 2)$ ،

4) احسب $P(X^2 - 6X + 8 < 0)$

التمرين (07) يحتوي كيس على12قريصة متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس مرقمة من 1 إلى 12 (لكل قريصتين مختلفتين رقمان مختلفان) . نسحب في آن واحد 3 قريصات ونعتبر أن جميع السحبات متساوية الاحتمال .

1/ أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها تقبل القسمة على 3.

2/ أحسب احتمال سحب قريصة واحدة رقمها يقبل القسمة على 3.

3/ أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها بترتيب معين تشكل حدود متعاقبة من متتالية حسابية أساسها 3.

4/ أحسب احتمال سحب 3 قريصات أرقامها بترتيب معين تشكل حدود متعاقبة من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

التمرين (08) قطعة نقود مزيفة بحيث عند رميها يكون احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الحرف A ضعف احتمال ظهور الوجه الأخر والذي يحمل الحرف B .

1-احسب الاحتمالات التالية : $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(\overline{A})$ ، $P(A \cap B)$

2-نفرض ان ظهور الوجه A يعطي ربح 100 نقطة و ظهور الوجه B يعطي خسارة 50 نقطة ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ قيم الربح او الخسارة

- أكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X
- احسب الأمل الرياضياتي
- احسب التباين و الإنحراف المعياري .

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (09) تحتوي علبة على6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء.نسحب في آن واحد5 كرات بلا اختيار (الإمكانيات متساوية الاحتمال)

1) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة

-عين قانون احتمال هذا المتغير العشوائي

- أحسب أمله الرياضي

2) α عدد حقيقي .

نعتبر المتغير العشوائي Y الذي يرفق بكل سحب يحتوي على x كرة بيضاء و y كرة سوداء العدد : $\alpha x - y$

- عيّن العدد α حتى يكون الأمل الرياضي معدوما .

التمرين (10) نرمي نردين معا ونسجل الرقمين x وَ x' المحصل عليهما .

1/ عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي المعرف كما يلي : $y = |x - x'|$

- احسب أمله الرياضي .

2/ عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي المعرف كما يلي : $z = \max(x ; x')$

- احسب أمله الرياضي .

التمرين (11) يحتوي كيس على14 قريصة:4 قريصات تحمل الحرف مــ و 3 قريصات تحمل الحرف د و 3 قريصات تحمل الحرف يــ وقريصتان تحملان الحرف نــ وقريصتان تحملان الحرف ة نسحب في آن واحد 5 قريصات بلا اختيار (الإمكانيات متساوية الاحتمال)

1)ما هو الاحتمال لكي تكون الحروف التي تحملها القريصات المسحوبة هي حروف كلمة "**مدينة**"

2)ما هو الاحتمال لكي لا يحمل كل من القريصات المسحوبة الحرف مــ؟

3)ما هو الاحتمال لكي تحمل إحدى القريصات المسحوبة على الأقل الحرف مــ؟

4) ما هو الاحتمال لكي تحمل اثنتان من بين القريصات المسحوبة-على الأقل الحرف مــ؟

-تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال ثم تعطى قيمها المقربة إلـــى $\frac{1}{100}$ بالزيادة

التمرين (12) زهرة نرد **غير متوازنة** أوجهها تحمل الأرقام 1،2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 إحتمالات ظهورها في رمية واحدة هي P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4 ، P_5 ، P_6 على الترتيب.

1.علما أن هذه الأعداد P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4 ، P_5 ، P_6 بهذا الترتيب هي حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، أوجد الأعداد P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_4 ، P_5 ، P_6 .

2.نرمي زهرة النرد هذه مرة واحدة .

أ- ما احتمال ظهور رقم زوجي ؟

ب- ما احتمال ظهور رقم مضاعف لــ 3 ؟

3.ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية العدد المحصل عليه .

- عرف قانون الإحتمال و احسب أمله الرياضياتي ثم التباين و الإنحراف المعياري .

إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (13) كيس أ يحتوي على 6 قريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس تحمل الأرقام التالية : 1 ، 2 ، 2 ، 2 ، 4 ، 4 و كيس ب يحتوي على 4 قريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس تحمل الأرقام التالية : 0 ، 1 ، 2 ، 4 .

نسحب قريصة من الكيس أ ثم قريصة من الكيس ب و نفرض أن x الرقم المسجل على القريصة المسحوبة من الكيس أ و أن y الرقم المسجل على القريصة المسحوبة من الكيس ب .

1/ احسب احتمال الحصول على رقمين متساويين ($x = y$)

2/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل ثنائية (x، y) العدد x^y .

– عيّن قانون الاحتمال واحسب أملـــــه الرياضي .

التمرين (14) لتحضير مسابقة طلب من أربعة أساتذة أ ، ب ، جــ ، د تقديم تمرينين من طرف كل أستاذ (تمرين جبر وتمرين تحليل) . المتر شح يختار تمرينين من بين 8 التمارين المقترحة . طالب اختار تمرينين عشوائيا . احسب احتمال أن يكون :

1/ التمرينين المختارين جبر .

2/ التمرينين المختارين مقترحين من طرف أستاذ واحد .

3/ التمرينين المختارين مقترحين من طرف الأستاذ أ .

التمرين (15) زهرة نرد مكعبة كـــ$_1$ لها وجه يحمل الرقم 1، ووجهان يحملان الرقم 2 و ثلاثة أوجه تحمل الرقم3. زهرة نرد مكعبة كـــ$_2$ لها وجه يحمل الرقم1ووجهان يحملان الرقم 2ووجه يحمل الرقم3ووجهان يحملان الرقم4.

نفرض أن كل الأوجه في كل من المكعبين لها نفس حظوظ الظهور.نرمي النردين ونسجل الرقمان المسجلان على الوجهين العلويين للزهرتين.ما احتمال الحصول على: أ) زوجيين

ب) فرديين

التمرين (15) لعبة يانصيب مؤلفة من مئة ورقة مرقمة من 1إلى100.كل ورقة رقمها ينتهي بأحد الرقمين 0 أو 5 تعطي ربحا قدره 10دنانيرأما الأوراق الأخرى فإنها لا تعطي أي ربح

نسحب ورقتين من بين الأوراق السابقة وليكن Xالمتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب الربح المحصل عليه

1)احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X؟

التمرين (16) يحوي كيس 5 كريات تحمل الرقم 10 و 3 كريات تحمل الرقم 15 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين و ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع الرقمين المحصل عليهما .1) حدد مجموعة القيم الممكنة للمتغير X .

3) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X

3)أحسب الامل الرياضياتي $E(X)$ ثم أحسب التباين $V(X)$

4) أوجد $P(X \geq 25)$

الاحتمال الشرطي -الحوادث المستقلة -دستور الإحتمالات الكلية -استعمال الشجرة العنكبوتية

التمرين (01) يحتوي كيس على 3 زهرات نرد مكعبة منها اثنتان عاديتان أوجه كل منهما مرقمة من 1 إلى 6. وواحد خاص له ثلاثة أوجه تحمل الرقم 6 وَ ثلاثة أوجه تحمل الرقم 1.

نسحب من هذا الكيس زهرتي نرد في آن واحد ثم نرمي النردين ونسجل الرقمين اللذين يظهران على الوجهين العلويين.

نسمـــــي الحادثة A " الزهرتان المسحوبتان عاديتان "

الحادثة B "الوجهان العلويان يحملان الرقم 6 "

1) α- عيّن الحادثة العكسية للحادثة A والتي نرمز لها بـــ $\overline{A}$.

β- احسب $p(A)$ احتمال الحادثة A ثم $p\left(\overline{A}\right)$ احتمال الحادثة العكسية للحادثة $\overline{A}$.

2) α - احسب $p_A(B)$ ، $p(B\cap A)$.

β - احسب $p(B)$

3) - بيّن أن $p_B(A)=\dfrac{1}{7}$

التمرين (02) يحتوي وعاء على 3 قريصات بيضاء و 4 حمراء .إحدى القريصات البيضاء تحمل الرقم1 والأخريان تحملان الرقم5.أما القريصات الحمراء ، فاثنتان منها تحملان الرقم 2 والأخريان تحملان الرقم3. نسحب عشوائيا من هذا الوعاء قريصتين في آن واحد.ونحسب مجموع الرقمين المسجلين عليهما

1)ما هو احتمال أن يكون هذا المجموع أكبر تماما من 6؟

2)ماهو احتمال أن يكون المجموع أكبر تماما من6علما أن القريصتين المسحوبتين بيضاوان؟

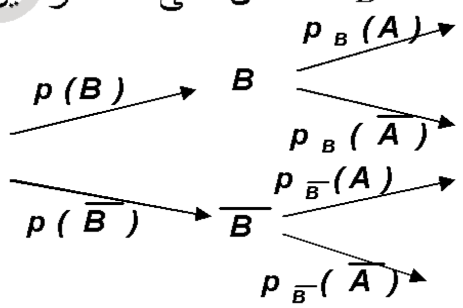
3)نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب لقريصتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما.

- ما هي قيم المتغير العشوائي X؟
- أعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي.

التمرين (03) نعتبر صندوقين أحدهما U_1 يحوي 5 كرات خضراء و 3 كرات حمراء و الآخر U_2 يحوي 3 كرات خضراءو 6 كرات حمراء . كل الكرات لا نميز بينها باللمس .

ترمي حجر نرد مكعب غير مزور ، مرقم من 1 الى 6 . إذا تحصلنا على أحد الرقمين 5 أو 6 نسحب كرة عشوائيا من الصندوق U_1 و في الحالات الأخرى نسحب كرة من الصندوق U_2

نسمي A الحادثة " الكرة المسحوبة خضراء " و نسمي الحادثة B " نحصل على أحد الرقمين 5 أو 6 "



1) أحسب $p(B)$ و $p(\overline{B})$

2) أحسب $p_B(A)$ و استنتج $p_B(\overline{A})$

3) أحسب $p_{\overline{B}}(A)$ و استنتج $p_{\overline{B}}(\overline{A})$

4) أكمل الشجرة بالقيم العددية المحصل عليها

5) استنتج $p(A)$

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

التمرين (04) يحتوي كيس على 6 كرات حمراء و 4 كرات سوداء . نسحب من هذا الكيس 3 كرات على التوالي و دون إرجاع .

1-احسب احتمال تحقق كل من الحدثين A و B حيث :

A : الحصول على اللونين معا ، B : الحصول على لون واحد

2- باستعمال شجرة الاحتمالات لنمذجة كل من الوضعيتين السابقتين لحساب احتمال تحقق كل من الحدثين A و B

التمرين (04) يتكون مصنع لإنتاج الثلاجات من 3 أقسام حيث تساهم بـــ 30% ، 60% ، 10% على الترتيب في الإنتاج الكلي للمصنع و احتمالات أن تكون الثلاجة صالحة للاستعمال علما أنها صنعت في الأقسام الثلاثة هي 0.75 ، 0.85 ، 0.90 على الترتيب

ما هو الاحتمال أن تكون الثلاجة المصنوعة في هذا المصنع صالحة للاستعمال .

التمرين (05) يحتوي كيس على 5 كرات خضراء و 3 كرات صفراء . نسحب من الكيس 3 كرات على التوالي بحيث بعد كل سحبة نعيد الكرة المسحوبة قبل السحب الموالي .

1-احسب احتمال تحقق كل من الحدثين C و D حيث :

C : الحصول على اللونين معا ، D: الحصول على لون واحد

2- استعمل شجرة الاحتمالات لنمذجة كل من الوضعيتين السابقتين ولحساب تحقق كل من احتمال الحدثين C و D

التمرين (06) يحتوي كيس U_1 على كريتين تحملان الرقم 1 ، وعلى 4 كرات تحمل الرقم 2 (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .و يحتوي كيس U_2 على 3 كرات حمراء و 4 كرات خضراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) . نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس U_1

1) احسب احتمال الحدثان التاليان : A :" الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1"

B :" الكرة المسحوبة تحمل الرقم 2 "

2) نعتبر في هذا السؤال التجربة العشوائية التالية :نسحب كرة واحدة من الكيس U_1 و نسجل رقمها :

- إذا كان هذا الرقم هو 1 نقوم بسحب كرة واحدة من الكيس U_2 .
- و إذا كان هذا الرقم هو 2 نقوم بسحب كريتين في آن واحد من الكيس U_2.

ليكن n عدد الكرات الحمراء المسحوبة من الكيس U_2

و E_n الحدث " الحصول بالضبط على n كرة حمراء

أ – بيّن أن : $P\left(E_1\right)=\dfrac{11}{21}$ و $P\left(E_2\right)=\dfrac{2}{21}$

ب- احسب احتمال الحدث A علما أن الحدث E_1 محقق .

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (07) يحتوي كيس على 12 كرة منها : 3 بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2
4 حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 و 5 خضراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 ، 2 ، 3
نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس .
نعتبر الحادثتين : A " سحب كرتين من نفس اللون " ، B " سحب كرة خضراء على الأقل "
أ–أحسب احتمال كل حادثة من الحوادث : A ، B ، $A \cap B$
ب–هل الحادثتان A ، B مستقلتان ؟
ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين
أ– أعط قانون احتمال المتغير العشوائي X .
ب–أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

التمرين (08) زهرة نرد مزورة أوجهها تحمل الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6 بحيث احتمال ظهور هذه الأوجه هي p_1 ، p_2 ، p_3 ، p_4 ، p_5 ، p_6 وهي متناسبة على الترتيب مع الأعداد 1، 2، 3، 4، 5، 6 على الترتيب.
1. عيّن قانون الاحتمال المرفق بهذه التجربة.
2. نرمي زهرة النرد هذه ونعتبر الحوادث:
A : "الوجه الظاهر يحمل رقما زوجيا" ؛ B : " الوجه الظاهر يحمل رقما أكبر من أو يساوي 3" ؛
C : "الوجه الظاهر يحمل الرقم 3 أو 4".
احسب احتمالات الحوادث A، B و C. ثم احسب الاحتمال الشرطي $P_A(B)$.
3. هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ وهل A و C مستقلتان ؟
4. ما هو احتمال أن نحصل على الرقم 6 مرّة على الأقل ؟

التمرين (09) طالب في قسم نهائي علوم تجريبية أو رياضيات أو تقني رياضي يعير نفس الاهتمام للمواد العلمية أو الأدبية. فإذا كان احتمال نجاحه في اختبار المواد العلمية في امتحان البكالوريا $\frac{1}{3}$
واحتمال نجاحه في باقي المواد هو $\frac{1}{4}$.
1–احسب احتمال نجاحه في امتحان البكالوريا.
2–ما هو احتمال نجاحه في المواد العلمية علما أنّه حصل على البكالوريا ؟

التمرين (10) يريد تلاميذ قسم مكون من 10 ذكور و 6 إناث أن يكونوا لجنة من 3 أفراد لتمثيلهم في مسابقة دراسية (نفترض أن كل التلاميذ لهم نفس الحظوظ لكي يقع عليهم الاختيار).
1– ما هو عدد اللجان الممكنة ؟ لتكن الحادثة E : " أعضاء اللجنة من نفس الجنس " .
2– أحسب احتمال الحادثة E .
3– استنتج احتمال الحادثة F : " أعضاء اللجنة من الجنسين معا " .
نفترض أنه من بين تلاميذ القسم يوجد التلميذ A وأخته التلميذة B .
ما هو الاحتمال لكي تتضمن اللجنة أعضاء من الجنسين معا، وأن لا يتواجد بها التلميذ A والتلميذة B في آن واحد .
ليكن المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الإناث المتواجدة باللجنة.
حدد قانون احتمال X و أحسب الأمل الرياضي : $E(X)$.

التمرين (11) يأخذ علي عند خروجه للعمل صباحا مظلته 3مرات من10وعند اصطحابه لمظلته يكون الجو ماطرا مرتين من 7وغائما 4مرات من9وفي باقي الحالات يكون الجو صحوا وبالمقابل عندما لا تكون مظلته معه يكون الجو صحوا 3مرات من5 وغائما مرتين من5.

1- مثل المعطيات السابقة بواسطة شجرة الاحتمالات.

2-أحسب احتمال

أ- أن يكون الجو غائما.

ب- أن يأخذ علي المظلة علم ان الجو ماطر. جـ -الا يصطحب مظلته علما أن الجو صحو

التمرين (12) تم تلقيح ربع سكان مدينة ضد مرض فيروسي.

وفي احصائية وجد أنه من بين المصابين بهذا المرض شخص واحد ملقح مقابل 4غير ملقحين و أنه يوجد مصاب واحد فقط من كل 12ملقحا.

1- اختر الرموز المناسبة للحوادث الواردة في النص و أنشئ الشجرة المثقلة بصورتين .

2- أحسب احتمال الاصابة بالمرض.

3- ماهو احتمال اصابة شخص غير ملقح بالمرض ؟. هل التلقيح فعال؟.

التمرين (13) عدد أقسام المستوى النهائي لشعبة في ثانوية هو 3 نرمز لها بالرموز C_1 و C_2 و C_3

. 30% من تلاميذ المستوى النهائي يدرسون في القسم C_1 و 50% من تلاميذ المستوى النهائي يدرسون في القسم C_2 وبقية تلاميذ المستوى النهائي يدرسون في القسم C_3.

25% من تلاميذ القسم C_1هم بنات ويشكل البنات نسبة 40% من تلاميذ القسم C_2، بينما يشكلن في القسم C_3 ما نسبته 80% .

1-نعين بصفة عشوائية تلميذ من المستوى النهائي.ما هو احتمال أن نعين بنتا ؟

2- عيّنا بصفة عشوائية تلميذ من المستوى النهائي فتبين أنه بنت ، ما هو احتمال أن تكون هذه البنت من القسم C_1 ؟

التمرين (14) 1) A و B حادثتان مستقلتان . بين أن

أ) A و $\overline{B}$ مستقلتان ب) $\overline{A}$ و B مستقلتان ج) $\overline{A}$ و $\overline{B}$ مستقلتان

2) يرمي قاذفان T و S في نفس الوقت هدفا معينا . الحادثتان A " S يصيب الهدف " ، B " T يصيب الهدف " مستقلتان و احتمالاهما $p_S = \frac{4}{5}$ و $p_T = \frac{7}{8}$ على الترتيب

- أحسب إحتمال الحوادث التالية :

أ) S و T يصيبان الهدف ب) S فقط يصيب الهدف

ج) الهدف لم يصب د) الهدف يصاب

هـ) قاذف واحد يصيب الهدف

التمرين (15) نرمي ثلاث مرات قطعة نقود متوازنة

نرمز بـ X_1 لعدد مرات ظهور " وجه " في الرمية الأولى (X_1 يأخذ القيمتين 0 أو 1)

و نرمز بالرمز X_2 لعدد مرات ظهور " وجه " في الرميتين الثانية و الثالثة .

- تحقق أن X_1 و X_2 هما متغيران عشوائيان مستقلان

إعداد الأستاذ
حليلات عباس

قوانين الاحتمالات المتقطعة(برنولي و ثنائي الحد) و قوانين الاحتمالات المستمرة (المنتظم و الآسي)

التمرين (01) يقوم لاعب بإلقاء حجر نرد ، ويعتبر اللاعب رابحا إذا كان الوجه الظاهر للنرد هو 6 . ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة 1 إذا كانت نتيجة الرمية هي 6 و يأخذ القيمة 0 إذا كانت نتيجة الرمية غير ذلك.

1- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي

2-يقوم الآن اللاعب بإلقاء النرد 3 مرات متتابعة في نفس الشروط .ليكن Y المتغير العشوائي الذي يحصي عدد المرات التي يربح فيها هذا اللاعب .

أ- ما هي القيم الممكنة لـــ Y

ب- مثل المخارج الممكنة لهذه التجربة بشجرة الاحتمالات .

جـــ - عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي Y

التمرين (02) اختبار مكون من 10 أسئلة و لكل سؤال ثلاثة أجوبة مقترحة من بينها إجابة واحدة صحيحة فقط ، مترشح أجاب عشوائيا على الأسئلة العشرة ، وهذه الأجوبة مستقلة عن بعضها البعض

ما هو احتمال أن يكون المترشح أجاب إجابة صحيحة على :

1-ثلاثة أسئلة فقط ؟

2- كل الأسئلة ؟ 3- على الأكثر ثمانية أسئلة ؟

التمرين (03) نرمي 8 مرّات حجر نرد مكعب غير مزوّر مرقم من 1 الى 6 . ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة عدد مرات الحصول على رقم مضاعف للعدد 3 .

1) هل X يتبع قانونا ؟ في حالة الإيجاب ، أذكر القانون محدّدا وسائطه .

2) عين الأمل الرياضياتي و الإنحراف المعياري للمتغيرX

3) ماهو احتمال الحادثة " الحصول على 4 مرّات على مضاعف 3 " ؟

4) ما هو احتمال الحادثة " الحصول على 7 مرّات على الأكثر على مضاعف 3 " ؟

5) نرمي الآن الحجر n مرّة . ما هو احتمال الحادثة " الحصول على مرّة واحدة على الأقل على مضاعف 3 " ؟ - ما هي أصغر قيمة للعدد n حتى يكون هذا الاحتمال أكبر من 0,999 ؟

التمرين (04) يحتوي مجمع اقتصادي على عدة محلات ذات طابع تجاري من بينهم مكتبة . في دراسة إحصائية لوحظ أنه من بين 10 زوار للمجمع هناك شخص واحد يزور المكتبة .

نفرض في إحدى الأيام إقبال 100 شخص على المجمع .

عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي الذي يعطي النسبة المئوية للزوار الذين يزورون المكتبة

التمرين (05) f دالة معرفة على المجال $[0;1]$ بالعبارة : $f(x)=-6x^2+6x$

1- بين أن f دالة كثافة احتمال على المجال $[0;1]$

2- X متغير عشوائي كثافته f .

- احسب $P(X \leq 0.5)$ ، $P(X < 0.1)$ ، $P(0.2 < X < 0.8)$

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (06) ليكن m عدد حقيقي و f دالة معرفة على [0 ; 1] كما يلي $f(x)=\frac{mx^2}{1+x^3}$

1) عين m حتى تكون f دالة كثافة احتمال على [0 ; 1]

2) ليكن X المتغير العشوائي المعرف على [0 ; 1] و الذي قانون احتماله p و يقبل f دالة كثافة احتماله. عين $p(X\le\frac{1}{2})$ ، $p(X\ge\frac{1}{2})$ ، $p(\frac{1}{3}\le X\le\frac{1}{2})$ (تعطى القيم مدورة إلى 10^{-2})

التمرين (07) ليكن X متغيرعشوائي مستمر و دالة الكثافة f لقانون الاحتمال X معرف على المجال $[1;2]$ بالعبارة : $f(x)=\alpha.\frac{x+\ln x}{x^2}$ ، αعدد حقيق ثابت

1- عين : α

2- احسب : $E(X)$ و $V(X)$

التمرين (08) باستعمال قانون منتظم مختار بعناية حل المسألة الآتية :

في محطة نقل المسافرين تقلع حافلة لنقل المسافرين لولاية معينة كل 140 دقيقة . يصل أحد المسافرين صدفة إلى هذه المحطة .

1- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي الذي يعطي فترة انتظار هذا المسافر في المحطة لكي تقلع أول حافلة إلى الولاية التي يقصدها .

2- عين متوسط الفترة الزمنية التي ينتظرها فيها هذا المسافر إقلاع الحافلة .

3- احسب احتمال أن ينتظر هذا المسافر فترة زمنية تتعدى 50 دقيقة.

التمرين (09) يمثل زمن الانتظار أمام الشباك في إحدى الإدارات متغيرا عشوائيا X يناسب (بالدقائق) فترة الانتظار و يتبع قانونا أسيا بوسيط λ حيث $\lambda=0,08$

1) ما إحتمال أن ينتظر شخص : أ) أقل من 10 دقائق ؟ ب) أكثر من 30 دقيقة ؟

2) ما هو معدل زمن الانتظار ؟

التمرين (10) صندوق يحتوي على 8 قريصات صفراء و15 حمراء غير مميزة باللمس. نسحب عشوائيا على التوالي ودون إرجاع قريصتين من الصندوق .

1-احسب احتمال الحادثة : E "القريصة المسحوبة الأولى صفراء"

2- نكرر سبعة مرات هذه التجربة،و بعد كل تجربة نرجع القريصتين إلى الصندوق . ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة المتمثلة في عدد وقوع الحادثة E خلال التجارب السبعة.

أ* احسب احتمال الحادثة A " الحادثة E تقع بالضبط 3 مرات"

ب* احسب احتمال الحادثة B " الحادثة E تقع 6 مرات على الأقل"

التمرين (11) تمت نمذجة مدة صلاحية حاسوب بالأشهر بواسطة متغير عشوائي X يتبع قانون آسي ذو الوسيط 0.01

1-ماهو احتمال أن تكون مدة صلاحية هذا الحاسوب أصغر من 50 شهرا

2-ماهو احتمال أن تكون مدة صلاحية هذا الحاسوب اكبر من 50 شهرا .

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (12) في دراسة أعدّتها مؤسسة الكهرباء عن الأخطار التي يتعرض لها عمالها ، تبين أن كل عامل معرض باستمرار الى خطرين رئيسيين : الخطر (A) " سقوط العامل من العمود الكهربائي " احتماله 0,03 و الخطر (B) " تعرض العامل لصعق كهربائي " احتماله 0, 17 ، مع العلم أن الخطرين مستقلان عن بعضهما البعض . نسمي العامل الذي يصاب بأحد الخطرين " عامل مصاب " .

1) نأخذ عاملا عشوائيا من هذه المؤسسة . بين أن احتمال أن يكون مصابا هو 0,1949

2) هذه المؤسسة تضم 500 عامل . ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق عمال المؤسسة بعدد العمال المصابين .– عرّف قانون X و احسب أمله الرياضياتي

3) a) في فصل الشتاء شكلت المؤسسة فوجا مكونا من 10 عمال للتدخل السريع من أجل إصلاح مختلف الأعطاب التي

قد تحدث جراء التقلبات الجوية . أحسب احتمال أن يكون في هذا الفرع أكثر من عاملين مصابين .

b) حتى لا يؤثر المصابون على أداء زملائهم ، فكّرت إدارة المؤسسة في إعادة تشكيل فرع التدخل السريع بحيث يصبح احتمال وجود عاملا مصابا على الأقل ، أقل من % 50 . ماهو أكبر عدد من العمال يمكن أن يضمه هذا الفرع ؟

التمرين (13) كيس يحتوي على ثلاث قريصات حمراء ، وقريصتين بيضاوين و أربع قريصات خضراء ، لا نفرق بينها عند اللمس .

1. نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث قريصات من الكيس . احسب احتمال كل من الحوادث التالية

A : " القريصات الثلاث المسحوبة من نفس اللون "

B : " القريصات الثلاث المسحوبة مختلفة الألوان "

C :" من بين القريصات الثلاث المسحوبة ، اثنين فقط من نفس اللون "

2. نكرر السحب السابق n مرة متتالية $(n \geq 2)$ ، حيث في كل مرة نعيد القريصات المسحوبة إلى الكيس. ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ عدد المرات التي تكون فيها القريصات المسحوبة مختلفة الألوان . أ– احسب احتمال الحادثة $(X = 2)$

ب– بين أنه يجب على الأقل اربع سحبات متتالية حتى يكون الأمل الرياضي اكبر او يساوي 1

التمرين (14) 1) نرمي حجري نرد عاديين مرة واحدة .

– احسب احتمال الحصول على رقمين مجموعهما أكبر أو يساوي 10 ؟

2) نرمي الآن حجر النرد 5 مرات متتابعة و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل 5 رميات بعدد المرات التي نحصل فيها على رقمين مجموعهما أكبر أو يساوي 10

– عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و احسب أمله الرياضي و انحرافه المعياري .

التمرين (15)* 1– X متغير عشوائي يتبع قانون ثنائي الحد $B\left(n,p\right)$ برهن أن :

$$V\left(X\right)=np\left(1-p\right) \text{ و } E\left(X\right)=n.p$$

2– X متغير عشوائي يتبع القانون الأسى ذي الوسيط λ برهن: $E\left(X\right)=\dfrac{1}{\lambda}$ و $V\left(X\right)=\dfrac{1}{\lambda^2}$

إعداد الأستاذ: حليلات عمار

التدريب على حل تمارين بكالوريات

التمرين (01) صندوق به 8 كرات بيضاء و n كرة سوداء ($n \geq 2$).نفرض أن سحب كرة بيضاء يعطي ربح نقطة وسحب كرة سوداء يفقد نقطتين . X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع النقط المحصل عليها.

I/نسحب من هذا الكيس كرتين على التوالي مع إعادة الكرة المسحوبة قبل السحـــب الموالي

1)عين قيم المتغير العشوائي X . 2) عين قانون الاحتمال

3) احسب الأمل الرياضي $E(x)$ ثم عيّـــن العدد الطبيعي n حتى يكون $E(X)=0$

II/ نفرض الآن $n=6$. نسحب من هذا الكيس3 كرات في آن واحد

1)عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

2)احسب أمله الرياضي.

التمرين (02) يحتوي كيس U_1 على 5 كرات :ثلاث كرات تحمل الرقم 2 وكرتان تحملان الرقم 3 ، و يحتوي كيس U_2 على 5 كرات :ثلاث كرات بيضاء و كرتين حمراوين (لايمكن التمييز بين الكرات باللمس) .

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الكيس U_1 ونسجل رقمها ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد n كرة من الكيس U_2 حيث n هو الرقم الذي تحمله الكرة المسحوبة من الكيس U_1 .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

1) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X . 2)احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

التمرين (03) ظهر مرض في مزرعة سلالة أبقار بدولة ، وجد انه مس 0.5% من أبقار المزرعة

1. نختار عشوائيا حيوان من المزرعة. ما احتمال أن يكون مصاب بالمرض؟

2. أ) نختارعشوائيا على التوالي 10 حيوانات من المزرعة .نسمي X المتغير العشوائي المساوي لعدد الحيوانات المصابة من هذه الحيوانات .برهن أن X يتبع توزيع ثنائي الحد يطلب تعيين الوسيطين . احسب الأمل الرياضياتي

ب) نسمي A الحادثة :" لاأحد من الحيوانات 10 مصاب بالمرض "

ونسمي B الحادثة :"واحد ، على الأقل ، من الحيوانات 10 مصاب بالمرض "

– احسب احتمال A و احتمال B

3.بينت الدراسة أن لدى حيوان احتمال أن يكون الإختبار إيجابي لوجود المرض بحيث الحيوان مريض يساوي 0.8 . وعندما يكون الحيوان غير مريض ، احتمال أن يكون الإختبار سلبي يساوي 0.9 . نرمز T للحادثة " الإختبار ايجابي لوجود المرض " و M للحادثة " الحيوان مصاب بالمرض "

أ –أنشئ الشجرة المثقلة التي تعبر عن المعطيات السابقة .

ب– احسب احتمال الحادثة T

ج– احسب احتمال أن يكون حيوان مريض علما أن الإختبار إيجابي لوجود المرض

إعداد الأستاذ:
حليلات عمار

التمرين (04) يتشكل قطاع الإنتاج بمؤسسة من 3 أصناف من العمال :

مهندسين بنسبة 8% وعمال إنتاج بنسبة 82% والباقي اعوان صيانة .

النساء يمثلن 50%من المهندسين و25%من أعوان الصيانة و60%من عمال الإنتاج.

I- تم استجواب أحد أعضاء هذه المؤسسة عشوائيا

1-أنشئ الشجرة المثقلة التي تعبر عن المعطيات السابقة .

2-أحسب احتمالات الحوادث التالية العضو المستجوب هو :

A =(عون صيانة) . B= (عاملة صيانة) . C= (امرأة).

II- مصلحة الصيانة تقوم بمراقبة الماكينات كما تستدعى للتدخل عند وقوع عطل.من أجل ذلك وضعت صفارة للإنذار وبينت الدراسات أنه خلال اليوم :- احتمال عدم حدوث عطل ولا انطلاق لصفارة الانذار يساوي0.002 ، احتمال وقوع عطل وانطلاق لصفارة الانذار يساوي 0.003.

احتمال وقوع عطل هو0.04.

1-بين أن احتمال حدوث عطل وعدم انطلاق لصفارة الانذار هو0.037.

2-ماهو احتمال عدم انطلاق صفارة الانذار.

3-ماهو احتمال حدوث عطل علما أن صفارة الانذار لاتنطلق.

التمرين (05) يحتوي كيس على 6 كرات بيضاء تحمل الأعداد 0 ، 0 ، 0 ، 1 ، 1 ، 2 وكرتين سوداوين تحملان العددين 0 ، 1 (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الكيس .

1) احسب احتمال كل من الحدثين :

A : " للكرتين المسحوبتين نفس اللون "

B : " جداء العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين معدوم "

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يربط كل سحبة بمجموع العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين . أ) عين قيم المتغير العشوائي

ب) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X . ج) احسب الأمل الرياضي

التمرين (06) لصيانة أجهزة التدفئة تراقب شركة عن بعد خلال فصل الصيف الأجهزة .

نعلم أن 20% من الأجهزة هي تحت الضمان . من بين الأجهزة التي تحت الضمان يكون احتمال عدم صلاحية أحداها $\frac{1}{100}$ ، و من بين الأجهزة التي ليست تحت الضمان يكون احتمال عدم صلاحية أحدها $\frac{1}{10}$.نسمي G الحادثة " المدفئة تحت الضمان "

1) أحسب احتمال الحوادث التالية :

A " المدفئة تحت الضمان و هي غير صالحة " ، B " المدفئة غير صالحة "

2) في سكن ما المدفئة غير صالحة . بين أن احتمال أنها تحت الضمان هو $\frac{1}{41}$

3) المراقبة مجانية إذا كانت المدفئة تحت الضمان ، و يقدر ثمن المراقبة بـــ 800 DA إذا كانت المدفئة ليست تحت الضمان و هي صالحة بينما يقدر بـــ 2800 DA إذا كانت المدفئة ليست تحت الضمان و هي صالحة .ليكن X المتغير العشوائي الذي يأخذ كقيمة ثمن تكلفة مراقبة مدفئة . عين قانون احتمال X و أمله الرياضياتي .

التمرين (07) I) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة كما يلي : $U_1=\frac{1}{2}$ و العلاقة التراجعية $U_{n+1}=\frac{1}{6}U_n+\frac{1}{3}$.

لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل $n\geq 1$ كما يلي $V_n=U_n-\frac{2}{5}$

– تحقق أن المتتالية (V_n) هي هندسية يطلب تحديد أساسها . أكتب U_n بدلالة n

II) نعتبر حجر نرد A و B حيث A يحوي 3 أوجه حمراء و 3 أوجه بيضاء بينما يحوي B ، 4 أوجه حمراء و
وجهين أبيضين . نأخذ عشوائيا أحد الحجرين و نرميه ، إذا حصلنا على وجه أحمر نحتفظ بنفس الحجر و إذا تحصلنا
على وجه أبيض نغير الحجر و نرمي مرّة ثانية و هكذا ...
نسمي A_n الحادثة " نستعمل الحجر A في الرمية n " و $\overline{A_n}$ الحادثة العكسية لها كما نسمي R_n الحادثة " نستعمل
الحجر R في الرمية n" و $\overline{R_n}$ الحادثة العكسية لها و نرمز بالرمزين a_n ، r_n لاحتمالي الحادثتين A_n و R_n على
الترتيب . 1) عين a_1

2) عين r_1 (يمكن استعمال شجرة الإحتمالات)

3) بملاحظة أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $R_n=(A_n\cap R_n)\cup(R_n\cap\overline{A_n})$ و بين أن $r_n=-\frac{1}{6}a_n+\frac{2}{3}$

4) تحقق أنه من أجل كل $n\geq 1$ يكون $A_{n+1}=(A_n\cap R_n)\cup(\overline{A_n}\cap\overline{R_n})$

5) استنتج أجل كل $n\geq 1$ يكون $a_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{3}$ ثم أكتب a_n بدلالة n

6) استنتج عبارة r_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n\to\infty} r_n$

التمرين (08) I) c_1 و c_2 حجرا نرد متوازنان تحمل أوجه المكعب c_1 الأعداد :
$0،0،\frac{\pi}{3}،\frac{\pi}{3}،\frac{4\pi}{3}،\frac{4\pi}{3}$ و تحمل أوجه المكعب c_2 الأعداد : $0،0،\frac{\pi}{6}،\frac{\pi}{6}،\frac{\pi}{2}،\frac{\pi}{2}$.
نرمي الحجرين في آن واحد ونسجل العددين الظاهرين على الوجهين العلويين لــ c_1 و c_2 . نرمز لهذين العددين بـــ α و β .
ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل ر مية العدد $\sin(\alpha+\beta)$.

1) ماهي القيم الممكنة للمتغير X ؟ (يمكن إعطاء النتائج في جدول) .

2) عيّن قانون احتمال X .

3) احسب الأمل الرياضي $E(X)$ والإنحراف المعياري $\sigma(x)$ للمتغير العشوائي X .

II) نجري الآن اللعبة الآتية : يربح شخص ما $100\ DA$ عندما يرمي حجري النرد ويتحصل على $\sin(\alpha+\beta)=1$ أو $\sin(\alpha+\beta)=-1$ ، ويخسر $50\ DA$ في باقي الحالات .

1) ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية الربح أو الخسارة .

1) عيّن قانون احتمال Y .

2) نرمي حجري النرد 5 مرات . ما هو الاحتمال أن يربح اللاعب $300\ DA$ ؟

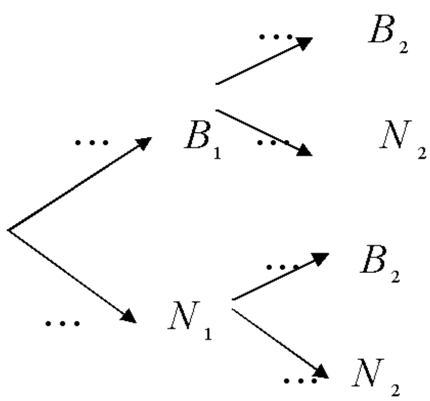
إعداد الأستاذ
حليلات عمار

التمرين (09) يحتوي كيس U_1 على k كرات بيضاء(k عدد طبيعي اكبراو يساوي 1) وثلاث كرات سوداء و يحتوي كيس U_2 على كرتين بيضاويين و كرة سوداء (لايمكن التمييز بين الكرات باللمس) .نسحب كرة عشوائيا من الكيس U_1 و نضعها في الكيس U_2 ثم نسحب كرة عشوائيا من الكيس U_2 . مجموعة هذه العمليات تشكل تجربة .

نسمي B_1 (على التوالي N_1) الحادثة " نسحب كرة بيضاء (على التوالي سوداء) من الكيس U_1

و نسمي B_2 (على التوالي N_2) الحادثة " نسحب كرة بيضاء (على التوالي سوداء) من الكيس U_2

1. أ- أكمل الشجرة المثقلة التالية :



ب- برهن أن احتمال الحادثة B_2 يساوي : $\frac{3k+6}{4k+12}$

في كل ما يلي نفرض $k=12$

2. لاعب مسجل لديه 8 نقاط كرصيد أولي ويقوم بتجربة .إذا كان في نهاية التجربة يحصل على كرة بيضاء من الكيس الثاني يربح اللاعب 12 نقطة و إلاّ لا يربح اية نقطة و يفقد رصيده .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل تجربة بـــ الفرق بين النقاط المحصل عليها و الرصيد الأولي .أ- بين أن قيم المتغير العشوائي هي :4 و 8-

ب- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

جـــ - احسب الأمل الرياضي

3. لاعب يقوم بهذه التجربة n مرة متتالية و مستقلة في بداية كل تجربة يكون الكيس U_1 به 12 كرة بيضاء و 3 سوداء و الكيس U_2 به 2 بيضاء وواحدة سوداء .

- عين اصغر عدد طبيعي n بحيث احتمال تحقق الحادثة B_2 على الأقل مرة يفوق 0.99

التمرين (10) باع محل للأجهزة الكهرومنزلية 4 ثلاجات في يوم واحد مضمونة لمدة 5 سنوات .احتمال أن لا تتعطل كل ثلاجة خلال فترة الضمان هو 0.9

1- احسب احتمال أن لا تتعطل الثلاجات الأربعة خلال فترة الضمان

2- احسب احتمال أن تتعطل ثلاجتان فقط خلال فترة الضمان .

التمرين (11) يقوم ممون ببيع نوعين أسلاك C_1 و C_2 ، بحيث تتضمن كل شحنة يبيعها 20% من النوع C_1 و 80% من النوع C_2

الجزء (أ) : في هذا الجزءلا يطلب أي حساب تقريبي .

نأخذ عشوائيا 4 أسلاك من شحنة تتكون من 50 سلكا.

1/ أعط احتمال تحقق الحادثة E " نتحصل على 4 أسلاك من النوع C_1 "

2/ أعط احتمال تحقق الحادثة F : " نتحصل على سلك واحد من النوع C_1 و 3 أسلاك من النوع C_2"

3/ أعط احتمال تحقق الحادثة G: " نتحصل على سلك واحد على الأقل من النوع C_1"

الجزء (ب) في هذا الجزء نأخذ عشوائيا سلكا واحدا من شحنة ونسجل نوعه ثم نعيده إلى هذه الشحنة .نرمز لهذه التجربة بالرمز $\mathcal{E}$ ونكررها n مرة .ليكن X عدد الأسلاك من النوع C_1 التي نتحصل عليها بهذه الطريقة .

1) نفرض أن $n=4$. تعطى النتائج بتقريب قدره 10^{-4} بالنقصان.

أ- احسب احتمال الحصول على سلكين من النوع C_1.

ب-احسب احتمال الحصول على سلك واحد ، على الأقل ، من النوع C_1

جـــ -احسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ و التباين $V(X)$.

2) في هذا السؤال n مجهول .

أ- عبر عن $P(X\geq 1)$ بدلالة n.

ب-كم من مرة يجب تكرار التجربة $\mathcal{E}$ حتى نستطيع القول أننا متأكدين بنسبة 90% من أننا سنحصل على سلك واحد على الأقل من النوع C_1؟

الهدية

توجيهات و إرشادات

التحضير للامتحان

- قبل موعد الامتحان بأسابيع نتثبت في القواعد والدساتير الأساسية لكل موضوع (مراجعة كراس التلخيص) و نعالج نماذج من تداريب و بكالوريات تجريبية مثلا)
- لا تكثر السهر المفرط وخاصة قبل موعد الامتحانات بأيام .
- المراجعة المكثفة وغير المنظمة والمتأخرة لا تجدي نفعا بل تحدث تشويش وتعب
- تجنب كل التكهنات والتوقعات الخاصة بالمواضيع المختارة في البكالوريا ولا تكن ضحية إشاعات وألزم التحضير الجاد .
- لا تتخوف عند اقتراب الامتحان ، بل ثق أن سنة الله في الكون كل مجتهد محضر جيّد يوفق إلى الخير بحول الله
- تحضير الوسائل والأدوات الضرورية والوثائق الثبوتية (بطاقة التعريف و الاستدعاء)
- الإطلاع الجيد لجدول سير الاختبارات
- إبتعد عن الزملاء المرتبكين وذوي العزائم الضعيفة .
- كن صاحب أمل وثقة في الله .

يتبع .. كيفية معالجة موضوع الامتحان

اقتراح : الأستاذ : حليلات عمار
تصحيح : الأستاذ : حميدي بوثلجة

سلسلة استعد للبكالوريا رقم 9
العد (التحليل التوفيقي)

التمرين (01) : توزيع الكرات :

اللون	حمراء	بيضاء	خضراء	المجموع
العدد	4	6	8	18
مرقمة من	1 إلى 4	1 إلى 6	1 الى8	

لسحب : ثلاث كرات في آن واحد (توفيقة)

1) أ) عدد الحالات للحصول على 3 أرقام فردية :

اللون	حمراء	بيضاء	خضراء	عدد الأرقام الفردية
عدد كرات	4	6	8	
أرقام فردية	1، 3	3،1 ،5	1،3 ،5 ،7	9

نختار 3 أرقام فردية من بين 9 أرقام فردية عدد الاختيارات: $C_9^3 = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$

ب) عدد الحالات التي نحصل فيها على كرة حمراء على الأقل:

!!!!	على الأقل كرة حمراء من بين الثلاثة تعني					
	1 حمراء و 2 ليست حمراء	إما	2 حمراء و 1 ليست حمراء	إما	3 حمراء	المجموع
	$C_4^1 \times C_{14}^2$	$+$	$C_4^2 \times C_{14}^1$	$+$	C_4^3	452
العدد	4×91	$+$	6×14	$+$	4	

طريقة ثانية : الحالة الوحيدة التي لم تحسب من بين كل الحالات الممكنة في الجدول (!!!!) هي سحب ثلاث كرات ليست حمراء وعدد الحالات الممكنة لذلك هي : $C_{14}^3 = 364$ نطرح هذا العدد من عدد كل الحالات الممكنة أي C_{18}^3 نجد كذلك 452 .

جـ) عدد الحالات التي نحصل فيها على كرة واحدة فقط تحمل الرقم 4 .
توجد 3 كرات تحمل الرقم 4 نختار من بينها كرة واحدة و توجد 14 كرة لا تحمل الرقم 4 نختار من بينها اثنتان. عدد الحالات هو : $C_3^1 \times C_{14}^2 = 3\times91 = 273$.

التمرين (02) : المعطيات : 3 كتب رياضيات + 2 كتب فيزياء +4 كتب أدب عربي
التجربة : وضع هذه الكتب (عددها 9) على رف مكتبته

أ) وضع كتب نفس المادة متجاورة : هذه الحالة تمثل ترتيب 3 مواد وعددها هو عدد التبديلات ذات 3 عناصر.
عدد الحالات الممكنة يساوي 6 = ! 3 .

ب) كتب الأدب العربي فقط تبقى متجاورة : نتعامل هنا مع مجموعة كتب الأدب العربي كعنصر واحد في تبديلها مع بقية العناصر أي الكتب الخمسة (3+2) .
عدد الحالات الممكنة : 720 = ! 6 .

جـ) دون أي شرط : عدد الحالات هو عدد التبديلات ذات 9 عناصر : 362880 = ! 9 .

التمرين (03) :

1) لما $n = 0$ ، الخاصية صحيحة لأن : $2^0 = C_0^0 = 1$.

لما $n \neq 0$ ، نعوض $a = b = 1$ في دستور ثنائي الحد :

$$(a+b)^n = C_n^0 \times a^n + C_n^1 \times a^{n-1} \times b + ... + C_n^p \times a^{n-p} \times b^p + ...C_n^n \times b^n \qquad (p \leq n)$$

$$2^n = (1+1)^n = C_n^0 \times 1^n + C_n^1 \times 1^{n-1} \times 1 + ... + C_n^p \times 1^{n-p} \times 1^p + .. + .C_n^n \times 1^n$$

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^p + .. + .C_n^n$$

2) أ) n و m عددان طبيعيان حيث $n \geq m$ هنا يجب فرض $m \geq 1$. نبرهن : $mC_n^m = nC_{n-1}^{m-1}$

$$mC_n^m = m \times \frac{n!}{m! \times (n-m)!} = \frac{n!}{(m-1)! \times (n-m)!} = n \times \frac{(n-1)!}{(m-1)! \times ((n-1)-(m-1))!} = n \times C_{n-1}^{m-1}$$

ب) قيمة المجموع : $S = \sum_{m=0}^{m=n} mC_n^m$

$$S = \sum_{m=0}^{m=n} mC_n^m = 0 \times 1 + 1 \times C_n^1 + 2 \times C_n^2 + ... + p \times C_n^p + ... + n \times C_n^n$$

$$= 0 + n \times C_{n-1}^0 + n \times C_{n-1}^1 + ... + n \times C_{n-1}^{p-1} + ... + n \times C_{n-1}^{n-1}$$

$$= n \times \left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + ... + C_{n-1}^{p-1} + ... + C_{n-1}^{n-1}\right) = n \times 2^{(n-1)}$$

التمرين (04) :

1) أ) حل المعادلة : $C_n^0 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{5}{2}n + 1$ بما أن مهما يكن n : $C_n^0 = 1$

المعادلة تكتب : $C_n^2 + C_n^3 = \frac{5}{2}n$. حتى تقبل المعادلة حلولا يجب أن يكون عددا زوجيا لأن الطرف الأول عدد طبيعي و يكون الطرف الثاني طبيعيا إذا كان n زوجيا .

*إذا كان $n = 0$ فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني و يساوي 0 .

* إذا كان $n = 2$ فإن الطرف الأول يساوي 0 و الطرف الثاني يساوي 5.

* إذا كان: $n \geq 3$. فإن : $C_n^2 + C_n^3 = \frac{n \times (n-1)}{2} + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6}$

تكتب المعادلة في هذه الحالة : $\frac{n \times (n-1)}{2} + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6} = \frac{5}{2}n$

بعد الاختزال نجد : $n^2 = 16$ أي $n = 4$. مجموعة حلول هذه المعادلة هي : $\{0;4\}$

(ضرورة التحقق).

ب) حل المعادلة : $C_n^3 + C_{2n}^2 = 8n$

* إذا كان $n = 0$ فإن الطرف الأول يساوي الطرف الثاني و يساوي 0

* إذا كان $n = 1$ فإن الطرف الأول يساوي 1 و الطرف الثاني يساوي 8

* إذا كان $n = 2$ فإن الطرف الأول يساوي 6 و الطرف الثاني يساوي 16

* إذا كان: $n \geq 3$. فإن: $C_n^3 + C_{2n}^2 = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6} + \frac{2n \times (2n-1)}{2}$

تكتب المعادلة في هذه الحالة: $\frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{6} + \frac{2n \times (2n-1)}{2} = 8n$

بعد الاختزال نجد : $n^2+9n-52=0$ ، $\Delta=289=17^2$ و $n=4$
مجموعة حلول هذه المعادلة هي : $\{0;4\}$

2) حل في IN^2 الجملة : $\begin{cases} C_{x+1}^{y}=C_x^{y-1} \\ C_{x+y}^{2}=10 \end{cases}$

الشروط : $y-1 \geq 0$

الحالة الأولى : $x < y-1$ و $x+y \geq 2$. تكتب الجملة : $\begin{cases} 0=0 \\ \dfrac{(x+y)\times(x+y-1)}{2}=10 \end{cases}$

أي $(x+y)\times(x+y-1)=20$ بما أن $(x+y)$ و $(x+y-1)$ عددين متتابعين نستنتج أن :
$x+y=5$. الثنائيات الطبيعية التي تحقق هي : $(0,5)$ و$(1,4)$.

الحالة الثانية : $x \geq y-1$ و$x+y \geq 2$ تكتب الجملة : $\begin{cases} C_x^{y}+C_x^{y-1}=C_x^{y-1} \\ \dfrac{(x+y)\times(x+y-1)}{2}=10 \end{cases}$ أي $\begin{cases} C_x^{y}=0 \\ \dfrac{(x+y)\times(x+y-1)}{2}=10 \end{cases}$

أي $x+y=5$ و $x \prec y$. الثنائي, التي تحقق هي : $(2,3)$
حلول الجملة هي الثنائيات $(2,3)$; $(1,4)$; $(0,5)$.

التمرين (05) : مركز الأبحاث يتكون من : 6 باحثين و 4 باحثات
اللجنة : 4 أعضاء
1) عدد اللجان التي يمكن تشكيلها : عدد التوفيقات ذات 4 عناصر من مجموعة ذات 10 عناصر

$$C_{10}^{4}=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

2) أ) عدد اللجان التي تضم 4 باحثات : $C_4^4=1$
ب) عدد اللجان التي تضم باحثة واحدة فقط : $C_4^1\times C_6^3=4\times20=80$
جـ) عدد اللجان التي تضم باحثة على الأقل: $C_{10}^4-C_6^4=210-15=195$ (انظر التمرين (01))
د) يوجد في اللجنة باحثان على الأكثر:
تعني : (باحثان وباحثتان) إما (باحث وثلاث باحثات) إما (أربع باحثات)
العدد : $C_6^2\times C_4^2$ + $C_6^1\times C_4^3$ + C_4^4
بعد الحساب نجد : 115 .
3) عدد اللجان التي تضم رئيسا ونائبا له وكاتبين : عدد الترتيبات ذات 4 عناصر أي :

$$(4!)\times C_{10}^{4}=24\times210=5040$$

التمرين (06) : n عدد طبيعي غير معدوم : $L_n=9C_{n+1}^{2}+27C_{n+1}^{3}+81C_{n+1}^{3}+......+3^{n+1}C_{n+1}^{n+1}$

1) نبين أن : $L_n=4^{n+1}-3n-4$
نعوض في دستور ثنائي الحد : $a=3$ و $b=1$ (انظر التمرين (03))

$$4^{n+1}=(1+3)^{n+1}=C_{n+1}^{0}\times1^{(n+1)}+C_{n+1}^{1}\times1^{n}\times3^{1}+C_{n+1}^{2}\times1^{(n-1)}\times3^{2}+...+C_{n+1}^{n+1}\times1^{0}\times3^{(n+1)}$$

$$4^{n+1}=1+(n+1)\times3+3^2\times C_{n+1}^{2}+3^3\times C_{n+1}^{3}+.....+3^{n+1}\times C_{n+1}^{n+1}$$

$$4^{n+1}=3n+4+L_n$$

نستنتج أن : $L_n = 4^{n+1} - 3n - 4$

2) حساب المجموع : $S_n = L_1 + L_2 + ... + L_n$

$$S_n = \left(4^2 - 7\right) + \left(4^3 - 10\right) + ... + \left(4^{n+1} - 3n - 4\right)$$
$$= \left(4^2 + 4^3 + ... + 4^{n+1}\right) - \left(7 + 10 + ... + 3n + 4\right)$$

القوس الأول يمثل مجموع حدود متتالية هندسية حدها الأول 4^2 وأساسها 4 وعدد حدودها (n-1)

و القوس الثاني يمثل مجموع حدود متتالية حسابية حدها الأول 7 وأساسها 3 وعدد حدودها (n-1)

نستنتج أن : $S_n = \left(4^2 \times \frac{4^{(n-1)} - 1}{4 - 1}\right) - \left((n-1) \times \frac{(7 + 3n + 4)}{2}\right) = \frac{16}{3}\left(4^{(n-1)} - 1\right) - \frac{(n-1)\times(3n+11)}{2}$

التمرين (07) :

1) برهان بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n : $1\times1! + 2\times2! + 3\times3! + ...n\times(n!) = (n+1)! - 1$

المرحلة الأولى :

التحقق من أجل n = 0 . الطرف الأول : $0\times0! = 0$ والطرف الثاني : $(0+1)! - 1 = 1 - 1 = 0$

المرحلة الثانية : من أجل عدد طبيعي كيفي n .نفرض : $1\times1! + 2\times2! + 3\times3! + ...n\times(n!) = (n+1)! - 1$

ونبرهن أن : $1\times1! + 2\times2! + 3\times3! + ...(n+1)\times(n+1)! = ((n+1)+1)! - 1 = (n+2)! - 1$

$$1\times1! + 2\times2! + 3\times3! + ...(n+1)\times(n+1)! = 1\times1! + 2\times2! + 3\times3! + ... + n\times n! + .(n+1)\times(n+1)!$$
$$= (n+1)! - 1 + (n+1)\times(n+1)!$$
$$= (n+1)!\times(1 + n + 1) - 1 = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$$

نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

2) برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $2^n\left[1\times3\times5\times7\times....\times(2n-1)\right] = \frac{(2n)!}{n!}$

المرحلة الأولى :

التحقق من أجل n = 1 . الطرف الأول : $2^1\times1 = 2$ والطرف الثاني : $\frac{(2\times1)!}{2!} = \frac{2!}{2!} = \frac{2}{2} = 1$

المرحلة الثانية : من أجل عدد طبيعي كيفي n غير معدوم نفرض: $2^n\left[1\times3\times5\times7\times....\times(2n-1)\right] = \frac{(2n)!}{n!}$

ونبرهن أن : $2^{(n+1)}\left[1\times3\times5\times7\times....\times(2(n+1)-1)\right] = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!}$

$$2^{(n+1)}\left[1\times3\times5\times7\times....\times(2(n+1)-1)\right] = 2\times2^n\left[1\times3\times5\times7\times....(2n-1)\times(2n+1)\right]$$
$$= 2^n\left[1\times3\times5\times7\times....(2n-1)\right]\times2\times(2n+1)$$
$$= \frac{(2n)!}{n!}\times2\times(2n+1) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)}\times(2n+1)\times2(n+1)$$
$$= \frac{(2n)!\times(2n+1)\times(2\ \ +2)}{(n+1)!\ \ n} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!} = \frac{[2(n+1)]!}{(n+1)!}$$

نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n .

التمرين (08) :

المعطيات: صندوق (10 كرات) : $\left\{\begin{array}{l}\text{4 سوداء}\\ \text{6 بيضاء}\end{array}\right.$

التجربة : 3 كرات في آن واحد : (توفيقة ذات 3 عناصر)

1) أ) عدد الحالات للحصول على كرة بيضاء : $C_6^1 \times C_4^2 = 36$

ب) عدد الحالات للحصول على كرة بيضاء على الأقل : $C_6^1 \times C_4^2 + C_6^2 \times C_4^1 + C_6^3 = C_{10}^3 - C_4^3 = 116$

جـ) عدد الحالات للحصول على 3 كرات ليست من نفس اللون : $C_{10}^3 - \left(C_4^3 + C_6^3\right) = 120 - (4+20) = 96$

الشرح : من عدد كل الحالات الممكنة نحذف الحالات التي تكون فيها كل الكرات حمراء وعددها 4 والحالة التي تكون فيها كل الكرات سوداء وعددها 20 .

2) المعطيات:

المعطيات: صندوق (10+ 2n كرات) : $\left\{\begin{array}{l}\text{(n+4) سوداء}\\ \text{(n+6) بيضاء}\end{array}\right.$

التجربة : سحب كرتين معا (لأن X_n عدد الحالات لسحب كرتين من نفس اللون)

أ) حساب العدد X_n :

$$X_n = C_{n+4}^2 + C_{n+6}^2 = \frac{(n+4)\times(n+3)}{2} + \frac{(n+6)\times(n+5)}{2}$$
$$= \frac{\left(\mathrm{n}^2 + 7n + 12\right)\times\left(\mathrm{n}^2 + 11n + 30\right)}{2} = \frac{2\mathrm{n}^2 + 18n + 42}{2} = \mathrm{n}^2 + 9n + 21$$

ب) نحل المعادلة : $X_n = 10713$ أي $\mathrm{n}^2 + 9n - 10692 = 0$ نجد $\Delta = 42849$ و $\mathrm{n} = 99$.

التمرين (09) : يعطى المنشور التالي : $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{15}$ نفرض طبعا $x \neq 0$

حسب دستور ثنائي الحد كل حد من حدود النشر يكتب: $C_{15}^p \times \left(x^3\right)^{15-p} \times \left(-\frac{2}{x^2}\right)^p$ مع $0 \leq p \leq 15$.

بما أن $\left(x^3\right)^{15-p} \times \left(-\frac{2}{x^2}\right)^p = x^{45-3p} \times \frac{(-2)^p}{x^{2p}} = (-2)^p \times x^{45-5p}$ فإن كل حد من الحدود يكتب :

$$C_{15}^p \times (-2)^p \times x^{45-5p}$$

1) يكون الحد درجته 10 إذا كان : $45 - 5p = 10$ أي $p = 7$. الحد هو : $C_{15}^7 \times (-2)^7 \times x^{10}$

2) الحد التاسع تقابله قيمة $p = 8$.الحد هو : $C_{15}^8 \times (-2)^8 \times x^5$ لأن قيمة p تبدأ من 0 .

3) يكون الحد ثابتا إذا كان : $45 - 5p = 0$ أي $p = 9$. الحد هو $C_{15}^9 \times (-2)^9 \times x^0 = C_{15}^9 \times (-2)^9$

التمرين (10) :

1) إثبات أن : $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$ الشرط : $n \geq m \geq 1$

$$C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m = \frac{(n-1)!}{(m-1)! \times (\text{n - m})!} + \frac{(n-1)!}{m! \times (\text{n - m -1})!} = \frac{(n-1)![m+n-m]}{m! \times (\text{n - m})!} = \frac{(n-1)! \times \text{n}}{m! \times (\text{n - m})!} = C_n^m$$

استنتاج أن: $C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$.

بتعويض m بـ m +1 و تعويض n على التوالي بالقيم n +1 ، n ، n-2 ، ....، m +1 ، m

في : $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$

نحصل على :

$$\begin{cases} C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + \cancel{C_n^{m+1}} \\ \cancel{C_n^{m+1}} = C_{n-1}^m + \cancel{C_{n-1}^{m+1}} \\ \cancel{C_{n-1}^{m+1}} = C_{n-2}^m + \cancel{C_{n-2}^{m+1}} \\ \cancel{C_{n-2}^{m+1}} = C_{n-3}^m + C_{n-3}^{m+1} \\ . \\ . \\ \cancel{C_{m+2}^{m+1}} = C_{m+1}^m + \cancel{C_{m+1}^{m+1}} \\ \cancel{C_{m+1}^{m+1}} = C_m^m + C_m^{m+1} \end{cases}$$

بالجمع طرف لطرف و اختزال الحدود المتساوية

يبقى في الطرف الأول الحد C_{n+1}^{m+1}

و يبقى في الطرف الثاني المجموع المطلوب :

$C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$

ملاحظة في الطرف الثاني : $C_m^{m+1} = 0$

2) * حساب المجموع : $S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n$

بتعويض m = 1 في المساواة : $C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$ نجد :

$C_n^1 + C_{n-1}^1 + ... + C_1^1 = C_{n+1}^2$ أي $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{(n+1) \times n}{2}$

* حساب المجموع: $S_2 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + n \times (n-1)$

بتعويض m = 2 في المساواة : $C_n^m + C_{n-1}^m + ... + C_m^m = C_{n+1}^{m+1}$ نجد:

$C_n^2 + C_{n-1}^2 + ... + C_2^2 = C_{n+1}^3$ أي $\dfrac{n(n-1)}{2} + \dfrac{(n-1) \times (n-2)}{2} + ... \dfrac{2 \times 1}{2} = \dfrac{(n+1)(n)(n-1)}{3 \times 2}$

بضرب الطرفين في 2 نجد: $S_2 = \dfrac{(n+1)n \times (n-1)}{3}$

* حساب المجموع: $S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

لدينا $n^2 = n^2 - n + n = n(n-1) + n$ بالتعويض في عبارة S_3

$$S_3 = 1 + (2 + 2 \times 1) + (3 + 3 \times 2) + ... + (n + n(n-1))$$
$$= (1 + 2 + 3 + ... + \text{n}) + (1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + (n-1) \times n)$$
$$= \text{S}_1 + S_2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n-1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الأستاذ : حميدي بوثلجة من البيض

التاريخ : 2008/05/25