

المتتاليات العددية

Suites numériques

بوزريعة: ربيع الأول 1432 هـ

تمرين 6

عين الحدود الثلاثة الأولى v_1, v_2, v_3 لمتتالية هندسية حدودها موجبة والمعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} v_1 \times v_2 \times v_3 = 1 \\ v_1 + v_2 - 6v_3 = 0 \end{cases}$$

0,5 , 1 , 2

تمرين 7

(v_n) متتالية هندسية حيث:

$$\begin{cases} v_1 \times v_5 = 16 \\ v_2 + v_3 + v_4 = 6 \end{cases}$$

أثبت أن $v_1 \times v_5 = v_3^2$ ثم احسب v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 .

-1 , 2 , -4 , 8 , -16 -16 , 8 , -4 , 2 , -1

تمرين 8

عين الحدود v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 لمتتالية هندسية متناقصة تماما حيث:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 140 \\ v_3 + v_4 + v_5 = 35 \end{cases}$$

5 , 10 , 20 , 40 , 80

تمرين 9

(v_n) متتالية هندسية حيث: $v_3 = 3$ و $v_6 = \frac{81}{8}$.

1- عين الأساس q لهذه المتتالية وحدها الأول v_1 .

2- اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

3- احسب المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

$\frac{8}{3} [(\frac{3}{2})^n - 1]$ $\frac{4}{3} (\frac{3}{2})^{n-1}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{3}{2}$

تمرين 10

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{\alpha^2 + n - 1}{\alpha + 1} : \alpha \in \mathbb{R} - \{-1\} \text{ و}$$

1- بين أن (u_n) متتالية حسابية. احسب أساسها r و u_0 .

2- نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

$$\text{بين أن: } S_n = \frac{n(n + 2\alpha^2 - 3)}{2(\alpha + 1)}$$

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = e^{u_n}$.

بين أن (v_n) متتالية هندسية. احسب أساسها q و v_0 .

4- نضع: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_{n-1}$. بين أن: $P_n = e^{S_n}$.

$v_0 = e^{\alpha-1}$ $q = e^{\frac{1}{\alpha+1}}$ $u_0 = \alpha - 1$ $r = \frac{1}{\alpha+1}$

المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية

تمرين 1

عين الحدود الثلاثة الأولى u_0, u_1, u_2 لمتتالية حسابية والمعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 3 \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = -24 \end{cases}$$

-4 , 1 , 6 6 , 1 , -4

تمرين 2

لتكن a, b, c حدود متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما بحيث تحقق:

$$\begin{cases} 2a + 3b + c = 7 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 62 \end{cases}$$

عين الأساس r لهذه المتتالية ثم استنتج الحدود a, b, c .

7 , 2 , -3 5

تمرين 3

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_1 = 3$ وبمجموع حدودها الأربعة الأولى: $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -18$.

1- عين أساس هذه المتتالية وحدها العاشر.

2- اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3- احسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{10}$.

-195 8 - 5n -42 -5

تمرين 4

(u_n) متتالية حسابية حيث: $u_3 = 2$ و $u_5 = 8$.

1- عين الأساس r لهذه المتتالية وحدها الأول u_1 .

2- احسب المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 95$.

10 $\frac{n(3n-11)}{2}$ -4 3

تمرين 5

(u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ حيث:

$$u_3^2 + u_5^2 + u_7^2 = 875$$

1- احسب الحد u_5 علما أنه موجب ثم احسب u_0 .

2- احسب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $8S_n \geq 945$.

$3 \leq n \leq 12$ $\frac{(n+1)(-5n+80)}{2}$ 40 15

البرهان بالتراجع، تغيرات متتالية وتقاربها

تمرين 11

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل

$$\text{كل عدد طبيعي } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 20}$$

- 1- برهن أنه من أجل كل $n \geq 0$ فإن $4 \leq u_n < 5$.
- 2- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.
- 3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. احسب نهايتها.

تمرين 12

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = -1$ ومن أجل

$$\text{كل عدد طبيعي } n, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}$$

- 1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n < 3$.
- 2- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
- 3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. احسب نهايتها.
- 4- بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_n = 3 - 2^{-n+2}$.

تمرين 13

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل

$$\text{كل عدد طبيعي } n, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{2u_n - 1}$$

- 1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n > 1$.
- 2- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.
- 3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. احسب نهايتها.
- 4- بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_n = \frac{2n+2}{2n+1}$.

تمرين 14

(u_n) متتالية معرفة بـ: $u_1 = \frac{5}{8}$ و $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$

- 1- برهن أنه من أجل كل $n \geq 1$ فإن $0 < u_n < 1$.
- 2- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.
- 3- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. احسب نهايتها.

تمرين 15

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل

$$\text{كل عدد طبيعي } n, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$$

- 1- احسب u_1, u_2, u_3 ثم أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n .
- 2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $u_n = \frac{1}{n+1}$.
- 3- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واحسب نهايتها.

تمرين 16 Bac S France 2004

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل

$$\text{عدد طبيعي } n, \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 3$$

- 1- ادرس رتبة المتتالية (u_n).
- 2- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n > n^2$.
- ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟
- 3- أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n , ثم برهن تخمينك.

تمرين 17 Bac S La Réunion 2007

a عدد حقيقي حيث $-1 < a \leq 0$. نعتبر المتتالية u المعرفة

$$\text{بـ } u_0 = a, \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, \quad u_{n+1} = u_n^2 + u_n$$

- 1- ادرس اتجاه تغير المتتالية u .
- 2- (أ) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = x^2 + x$. ادرس اتجاه تغير الدالة h . استنتج أنه من أجل كل x من المجال $]-1; 0[$, $h(x)$ ينتمي كذلك إلى المجال $]-1; 0[$.
- (ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $-1 < u_n < 0$.
- 3- ادرس تقارب المتتالية u . احسب نهايتها.

تمرين 18

(u_n) $_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية معرفة بـ: $u_n = \ln(n+1) - \ln n$

- 1- برهن أنه من أجل كل $n \geq 1$ فإن $0 < u_n \leq \ln 2$.
- 2- بين أن (u_n) $_{n \in \mathbb{N}^*}$ متناقصة تماما. يمكن دراسة اتجاه تغير الدالة $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$ على $[1; +\infty[$.
- 3- بين أن المتتالية (u_n) $_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة ثم احسب نهايتها.

تمرين 19

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ نعتبر: $u_n = n^2 - 2n + 5$, $x_n = \frac{n \cos n}{2n^2 + 1}$ و $w_n = n - \ln(n+2)$, $v_n = ne^{-2n+1}$

- 1- ادرس اتجاه تغير كل من (u_n), (v_n) و (w_n).
- 2- بين أن (v_n) محدودة من الأسفل بالعدد 0 أي $v_n > 0$.
- 3- ادرس تقارب كل من (u_n), (v_n), (w_n) و (x_n).

تمرين 20

(u_n) $_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية معرفة بـ: $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 3 \\ 3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n \end{cases}$

- 1- بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
- 2- بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 4 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

تمرين 21

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.
 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ وليكن ($\mathcal{C}$) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

- 1- ارسم البيان ($\mathcal{C}$) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$.
 - مثل على المحور ($O; \vec{i}$) الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 ؛ مبرزا خطوط الرسم ثم خمن تغيرات المتتالية (u_n) ونهايتها.
- 2- لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = u_n - 2$.
 برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q .
 - اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
 - ادرس تغيرات (u_n) ثم حسب نهايتها لما $n \rightarrow +\infty$.

$l = 2$	$2 + 2^{-n+1}$	2^{-n+1}	$q = \frac{1}{2}$
---------	----------------	------------	-------------------

تمرين 22

(u_n) متتالية عددية حدودها موجبة تماما معرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{u_n}$.
 1- برهن أنه من أجل كل $n \geq 0$ فإن $u_n \neq 2$.

2- f دالة معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بـ: $f(x) = \frac{x+2}{x}$ وليكن ($\mathcal{C}$) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

- ادرس تغيرات f ثم ارسم المنحني ($\mathcal{C}$) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$. (وحدة الطول 2cm).

- مثل على المحور ($O; \vec{i}$) الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 دون حساب، مبرزا خطوط الرسم ثم خمن نهاية المتتالية (u_n).

3- لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2}$.

- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q .
 - اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
 - احسب نهاية u_n لما $n \rightarrow +\infty$.

$l = 2$	$\frac{2(-2)^{n+1} + 1}{(-2)^{n+1} - 1}$	$(-2)^{n+1}$	$q = -2$
---------	--	--------------	----------

تمرين 23

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_1 = 19$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} = \frac{2n}{n+1}u_n - 1$.

لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = n(u_n - 1) - 2$.

- 1- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q .
- 2- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
- 3- ادرس تغيرات المتتالية (v_n).
- 4- احسب المجموع: $S_n = \sum_{p=1}^n v_p = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

$2^{n+4} - 16$	$\frac{2^{n+3} + n + 2}{n}$	2^{n+3}	$q = 2$
----------------	-----------------------------	-----------	---------

تمرين 24

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_n = \alpha u_{n-1} + 2$. $0 < \alpha < 1$.

لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = u_n + \frac{2}{\alpha - 1}$.

- 1- برهن أنه من أجل كل $n \geq 0$ فإن $u_n > 0$.
- 2- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q .
- 3- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
- 4- احسب نهاية u_n لما $n \rightarrow +\infty$.

5- احسب المجموعين: $S'_n = \sum_{p=0}^{n-1} u_p$ و $S_n = \sum_{p=0}^{n-1} v_p$.

$S'_n = \frac{(\alpha + 1)(\alpha^n - 1)}{(\alpha - 1)^2} - \frac{2n}{\alpha - 1}$	$l = \frac{2}{1 - \alpha}$	$q = \alpha$
--	----------------------------	--------------

تمرين 25

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 3 \\ 3u_{n+1} - 4u_n = -u_{n-1} \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

- 1- برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$.
- 2- احسب المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.
- 3- أثبت أن: $S_n = u_n - u_0$. استنتج عبارة u_n بدلالة n .

$4 - 3^{-n+1}$	$3 - 3^{-n+1}$
----------------	----------------

تمرين 26

(u_n) $_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية عددية معرفة بـ: $u_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$.

- 1- برهن أن (u_n) $_{n \in \mathbb{N}^*}$ متناقصة تماما.
- 2- عين العددين α و β بحيث: $u_n = \frac{\alpha}{2n+1} + \frac{\beta}{2n-1}$.
- 3- احسب المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- احسب نهاية S_n لما $n \rightarrow +\infty$.

$l = \frac{1}{2}$	$S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}$	$u_n = \frac{-1}{2(2n+1)} + \frac{1}{2(2n-1)}$
-------------------	---	--

المتتاليات المتجاورتان

تمرين 30

نعتبر المتتاليتين u و v المعرفتين من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ:

$$v_n = \frac{2n+3}{n+1} \quad \text{و} \quad u_n = \frac{2n+1}{n+1}$$

1- بين أن u و v متتاليتان متجاورتان.

2- احسب النهاية المشتركة لهما.

تمرين 31

نعتبر المتتاليتين u و v المعرفتين من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ بـ:

$$u_n = \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{4 \times 3} + \frac{1}{6 \times 5} + \dots + \frac{1}{2n(2n-1)}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{2n+1}$$

1- بين أن u و v متتاليتان متجاورتان.

2- احسب u_4 و v_4 . استنتج أن نهايتهما $0,63 < l < 0,74$.

تمرين 32 Examen USTHB (Fev 2009)

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1- احسب u_1, v_1, u_2, v_2 .

2- لتكن المتتالية (w_n) معرفة، من أجل كل عدد طبيعي n ,

$$w_n = v_n - u_n$$

(أ) برهن أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

(ب) اكتب عبارة w_n بدلالة n وحدد نهاية المتتالية (w_n) .

3- (أ) ادرس تغيرات المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

(ب) بين أن هاتين المتتاليتين متجاورتين. ماذا تستنتج؟

4- لتكن (t_n) متتالية معرفة بـ: $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ ، $n \in \mathbb{N}$

بين أن (t_n) ثابتة. استنتج نهاية المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

$$l = \frac{11}{3} \quad w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

تمرين 27

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = 3\alpha + 1$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $2u_{n+1} = u_n + 4\alpha$.

1- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) ثابتة.

في باقي التمرين نفرض أن (u_n) غير ثابتة ونضع من أجل

كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 2\beta$.

2- أوجد علاقة بين α و β حتى تكون (v_n) متتالية هندسية

يطلب حساب أساسها q وحددها الأول v_0 .

3- اكتب عبارة u_n بدلالة n و α ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4- ادرس تغيرات المتتالية (v_n) . ناقش حسب قيم α .

5- احسب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

$2(1-\alpha)(1-2^{-n-1}) + 4\alpha(n+1)$	$(1-\alpha)2^{-n} + 4\alpha$	$\beta = 2\alpha$	1
--	------------------------------	-------------------	---

تمرين 28 Bac S Inde 2004

1- (u_n) متتالية معرفة بحددها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل

عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$

(أ) احسب الحدود u_1, u_2, u_3 . عبر عن كل حد على شكل كسر غير قابل للاختزال.

(ب) قارن بين الحدود الأربعة الأولى للمتتالية u والحدود

الأربعة الأولى للمتتالية w المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = \frac{n}{n+1}$.

(ج) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن $u_n = w_n$.

2- لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(أ) برهن أن $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

(ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

- احسب نهاية S_n لما n يؤول إلى $+\infty$.

$$S_n = -\ln(n+1)$$

تمرين 29

(u_n) متتالية عددية حدودها موجبة، معرفة بحددها الأول

$u_1 = e^3$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n > 1$: $(u_n)^2 e = u_{n-1}$.

لتكن (v_n) متتالية معرفة بـ: $v_n = \frac{1 + \ln u_n}{2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

1- برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب حساب أساسها q و v_1 .

2- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3- احسب المجموع: $S_n = \sum_{p=1}^n v_p$ والجداء: $P_n = \prod_{p=1}^n u_p$

- احسب نهاية S_n ونهاية P_n لما $n \rightarrow +\infty$.

$e^{8-2^{-n+3}} - n$	$4 - 2^{-n+2}$	$e^{2^{-n+3}} - 1$	2^{-n+2}	2	$\frac{1}{2}$
----------------------	----------------	--------------------	------------	---	---------------